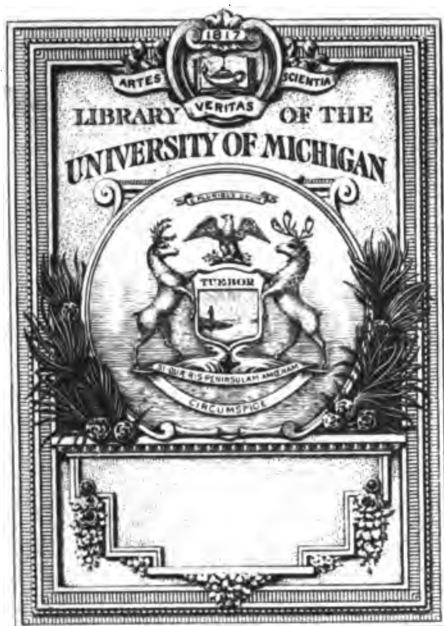
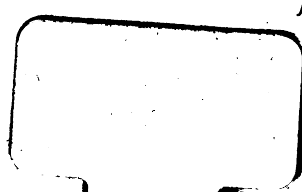

1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE





LINEÆ
TERTII ORDINIS
NEWTONIANÆ.

ISAACI NEWTONI

ENUMERATIO

LINEARUM TERTII ORDINIS;

SEQUITUR

ILLUSTRATIO EJUSDEM TRACTATUS

AUCTORE JACOBO STIRLING,

PARISIIS,

Impensis J. B. M. DUPRAT, Bibliopolæ.

M. DCC. XCVII.

MONITUM BIBLIOPOLÆ.

NUNC denuò prodit in lucem eximium opus quod ad enucleandum summi Newtoni tractatum de enumeratione linearum tertii ordinis composuit Jacobus Stirling; cujus rarissimi libri alteram editionem jam dudùm Geometræ desiderabant. Eorum votis ut satisfacerem, usus consilio viri in re mathematicâ præstantis, ad id præsertìm incubui ut nova hæc satis eleganter et quam emendatissimè perficeretur, sublatis erroribus Typographicis qui in editionem Oxoniensem anni 1717 frequentes irrepserant. Figuræ tabulis æneis ad venustatem incisæ, calculus per symbola ab integro ad examen est revocatus. Opportunum prætereà duxi commentario præmittere ipsam Newtoni enumerationem, ut teneant sublimioris Geometriæ studiosi, in uno eodemque volumine collectam et integram

totius argumenti delineationem. Manca enim est ex hoc etiam capite et incommoda prima editio quæ lectores remittit ad Newtoni tractatum inter reliqua ejus opera excusum, ut hinc necesse habeant duos eodem tempore libros in manibus versare.

Meum non est de Newtoni et Stirlingii meritis dicere: id unum rogo ut Geometræ curam hanc meam æqui bonique accipiant. Eos enim si primis hisce conatibus favere videro, alacri animo aggrediar celebriorum quæ in Mathematicis maximè rara sunt monumentorum editionem, daturus fortassè veteris Græci Geometræ opus ineditum, et hactenùs frustrà desideratum.

INDEX

EORUM QUÆ PRÆSENTI

VOLUMINE INVENIUNTUR.

ISAACI NEWTONI ENUMERATIO LINEARUM TERTII ORDINIS.

LINEÆ TERTII ORDINIS NEWTONIANÆ.

ISAACI

ISAACI NEWTONI
ENUMERATIO LINEARUM
TERTII ORDINIS.

I.

Linearum ordines.

LINEÆ Geometricæ secundùm numerum dimensionum æquationis, quâ relatio inter ordinatas et abscissas definitur, vel (quod perindè est) secundùm numerum punctorum, in quibus à lineâ rectâ secari possunt, optimè distinguuntur in ordines. Quâ ratione Linea primi ordinis erit Recta sola; eæ secundi sive quadratici ordinis erunt Sectiones conicæ et Circulus; et eæ tertii sive cubici ordinis Parabola cubica, Parabola *Neiliana*, Cissois veterum, et reliquæ, quas hìc enumerare suscepimus. Curva autem primi generis, (si quidem recta inter Curvas non est numeranda) eadem est cum Lineâ secundi ordinis; et curva secundi generis eadem cum Lineâ ordinis tertii. Et Linea ordinis infinitesimi ea est, quam recta in punctis infinitis secare potest, qualis est Spiralis, Cyclois, Quadratrix, et Linea omnis, quæ per radii vel rotæ revolutiones infinitas generatur.

II.

Proprietates Sectionum conicarum competunt Curvis superiorum generum.

Sectionum conicarum proprietates præcipuæ à Geometris passim traduntur. Et consimiles sunt proprietates Curvarum secundi generis, et reliquarum, ut ex sequenti proprietatum præcipuarum enumeratione constabit.

1. *De Curvarum secundi generis Ordinatis, Diametris, Verticibus, Centris, Axibus.*

Si rectæ plures parallelæ, et ad conicam sectionem utrinque terminatæ ducantur, recta duas earum bisecans bisecabit alias omnes, ideòque dicitur *Diameter* figuræ; et rectæ bisectæ dicuntur *Ordinatim applicatæ* ad Diametrum; et concursus omnium Diametrorum est *Centrum* figuræ; et intersectio Curvæ et Diametri *Vertex* nominatur; et Diameter illa *Axis* est, cui ordinatim applicatæ insistunt ad angulos rectos. Et ad eundem modum in Curvis secundi generis, si rectæ duæ quævis parallelæ ducantur occurrentes Curvæ in tribus punctis: Recta, quæ ita secat has parallelas, ut summa duarum partium ex uno secantis latere ad Curvam terminatarum æquetur parti tertiæ ex

altero latere ad curvam terminatæ, eodem modo secabit omnes alias his parallelas, curvæque in tribus punctis occurrentes rectas, hoc est, ita ut summa partium duarum ex uno ipsius latere semper æquetur parti tertiæ ex altero latere. Has itaque tres partes, quæ hinc inde æquantur, *Ordinatim applicatas*; et rectam secantem, cui ordinatim applicantur, *Diametrum*; et intersectionem Diametri et curvæ, *Verticem*; et concursum duarum Diametrorum *Centrum* nominare licet. Diameter autem ad ordinatas rectangula, si modò aliqua sit, etiam *Axis* dici potest; et ubì omnes Diametri in eodem puncto concurrunt istud erit *Centrum generale*.

2. *De Asymptotis, et earum proprietatibus.*

Hyperbola primi generis duas *Asymptotos*, ea secundi tres, ea tertii quatuor, et non plures habere potest, et sic in reliquis. Et quemadmodùm partes Lineæ cujusvis rectæ inter Hyperbolam conicam et duas ejus Asymptotos sunt hinc indè æquales: sic, in Hyperbolis secundi generis, si ducatur recta quævis secans tàm Curvam, quàm tres ejus Asymptotos in tribus punctis, summa duarum partium istius rectæ, quæ à duobus quibusvis Asymptotis in eandem plagam ad duo puncta

A 2

curvæ extenduntur, æqualis erit parti tertiæ, quæ à tertiâ Asymptoto in plagam contrariam ad tertium Curvæ punctum extenditur.

3. *De Lateribus rectis et transversis.*

Et, quemadmodùm in conicis sectionibus non Parabolicis, Quadratum ordinatim applicatæ, hoc est Rectangulum ordinatarum, quæ ad contrarias partes diametri ducuntur, est ad Rectangulum partium Diametri, quæ ad vertices Ellipseos, vel Hyperbolæ terminantur, ut data quædam Linea, quæ dicitur *Latus rectum*, ad partem Diametri, quæ inter vertices jacet et dicitur *Latus transversum*: sic in curvis non Parabolicis secundi generis Parallelepipedum sub tribus ordinatim applicatis est ad Parallelepipedum sub partibus Diametri ad ordinatas et tres vertices figuræ abscissis, in ratione quadam datâ: in quâ ratione si sumantur tres rectæ ad tres partes Diametri inter vertices figuræ sitas, singulæ ad singulas, tunc illæ tres rectæ dici possunt *Latera recta* figuræ; et illæ partes Diametri inter vertices *Latera transversa*. Et, sicut in Parabolâ conicâ, quæ ad unam et eandem Diametrum unicum tantùm habet verticem, Rectangulum sub ordinatis æquatur Rectangulo sub parte Diametri, quæ ad ordinatas, et verticem abscin-

ditur et rectâ quadam datâ, quæ *Latus rectum* dicitur: sic in Curvis secundi generis, quæ non nisi duos habent vertices ad eandem Diametrum, Parallelepipedum sub ordinatis tribus æquatur Parallelepipedo sub duabus partibus Diametri ad ordinatas et vertices illos duos abscissis, et rectâ quâdam datâ, quæ proinde *Latus rectum* dici potest.

4. *De Ratione contentorum sub Parallelarum segmentis.*

Denique, sicut in conicis sectionibus, ubì duæ parallelæ, ad curvam utrinque terminatæ secantur à duabus parallelis ad Curvam utrinque terminatis, prima à tertiâ, et secunda à quartâ, Rectangulum partium primæ est ad Rectangulum partium tertiæ, ut Rectangulum partium secundæ ad Rectangulum partium quartæ: sic, ubi quatuor tales rectæ occurrunt Curvæ secundi generis, singulæ in tribus punctis, Parallelepipedum partium primæ rectæ erit ad Parallelepipedum partium tertiæ, ut Parallelepipedum partium secundæ ad Parallelepipedum partium quartæ.

5. *De Cruribus Hyperbolicis et Parabolicis, et eorum plagis.*

Curvarum secundi, et superiorum generum, æquè atque primi, crura omnia in infinitum progredientia, vel *Hyperbolici* sunt generis, vel *Parabolici*. Crus *Hyperbolicum* voco, quod ad Asymptoton aliquam in infinitum appropinquat; *Parabolicum* quod Asymptoto destituitur. Hæc crura ex Tangentibus optimè dignoscuntur. Nam, si Punctum contactûs in infinitum abeat, Tangens cruris Hyperbolici cum Asymptoto coincidet, et Tangens cruris Parabolici in infinitum recedet, evanescet et nullibi reperietur. Invenitur igitur Asymptotos cruris cujusvis quærendo Tangentem cruris illius ad Punctum infinitè distans. Plaga autem cruris infiniti invenitur quærendo positionem Rectæ cujusvis, quæ tangenti parallela est ubì punctum contactûs in infinitum abit. Nam hæc recta in eandem plagam cum crure infinito dirigitur.

III.

Reductio Curvarum omnium generis secundi ad æquationum casus quatuor.

Lineæ omnes ordinis primi, tertii, quinti, septimi, et imparis cujusque, duo habent, ad minimum, crura in infinitum versùs plagas opposita progredientia. Et Lineæ omnes tertii ordinis duo habent ejusmodi crura in plagas opposita progredientia, in quas nulla alia earum crura infinita (præterquam in Parabolâ *Cartesianâ*) tendunt.

CAS. I.

Si crura illa sint Hyperbolici generis, sit (*fig.* 1.) G A S eorum Asymptotos, et huic parallela agatur Recta quævis C B c ad curvam utrinque, (si fieri potest,) terminata, eademque bisecetur in puncto X, et locus puncti illius X erit Hyperbola conica, (puta X Φ,) cujus una Asymptotos est A G. Sit ejus altera Asymptotos A B, et æquatio, quâ relatio inter ordinatam B C, et abscissam A B definitur, si A B dicatur x et B C y, semper induet hanc formam TAB. I.

$$xyy + ey = ax^3 + bxx + cx + d,$$

TAB. I. ubì termini, e, a, b, c, d, designant quantitates datas signis suis + et — affectas, quarum quælibet deesse possunt, modò ex earum defectu figura in sectionem conicam non vertatur. Potest autem Hyperbola illa conica cum Asymptotis suis coincidere, id est punctum X in rectâ A B locari : et tunc terminus $+ey$ deest.

CAS. II.

At si (*fig.* 2.) Recta illa C B c non potest utrinque ad Curvam terminari, sed Curvæ in unico tantùm puncto occurrit : age quamvis positione datam Rectam A B Asymptoto A S occurrentem in A, ut et aliam quamvis B C Asymptoto illi parallelam, Curvæque occurrentem in puncto C, et æquatio, quâ relatio inter ordinatam B C et abscissam A B definitur, semper induet hanc formam,

$$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

CAS. III.

Quòd si crura illa opposita Parabolici sint generis, Recta (*fig.* 3.) C B c ad Curvam utrinque, si fieri potest, terminata in plagam crurum ducatur, et bisecetur in B, et locus puncti B erit Linea recta. Sit ista A B, terminata ad datum quodvis punctum A, et æquatio, quâ relatio inter ordinatam B C et

abscissam A B definitur, semper induet hanc formam, TAB. I.

$$y^2 = a x^3 + b x^2 + c x + d.$$

CAS. IV.

At verò si (*fig.* 4.) recta illa C B c in unico tantùm puncto occurrat Curvæ, ideoque ad Curvam utrinque terminari non possit; sit Punctum illud C, et incidat recta illa ad punctum B in rectam quamvis aliam, positione datam, et ad datum quodvis punctum A terminatam, A B: et æquatio, quâ relatio inter ordinatam B C et abscissam A C definitur, semper induet hanc formam,

$$y = a x^3 + b x^2 + c x + d.$$

Nomina formarum.

Enumerando Curvas horum casuum, Hyperbolam vocabimus, *Inscriptam*, quæ tota jacet in Asymptotôn angulo ad instar Hyperbolæ conicæ; *Circumscriptam*, quæ Asymptotos secat et partes abscissas in sinu suo amplectitur; *Ambigenam*, quæ uno crure infinito inscribitur et altero circumscribitur; *Convergentem*, cujus crura concavitate suâ se invicem respiciunt, et in plagam eandem diriguntur; *Divergentem*, cujus crura convexitate suâ se invicem respiciunt et in plagas contrarias

TAB. I. diriguntur; *Cruribus contrariis præditam*, cujus crura in partes contrarias convexa sunt, et in plagas contrarias infinita; *Conchoidalem*, quæ vertice concavo et cruribus divergentibus ad Asymptoton applicatur; *Anguineam*, quæ flexibus contrariis Asymptoton secat, et utrinque in crura contraria producitur; *Cruciformem*, quæ conjugatam decussat; *Nodatam*, quæ seipsam decussat in orbem redeundo; *Cuspidatam*, cujus partes duæ in angulo contactûs concurrunt et ibi terminantur; *Punctatam*, quæ conjugatam habet ovalem infinitè parvam, id est, Punctum; et *Puram*, quæ per impossibilitatem duarum radicum, Ovali, Nodo, Cuspide et Puncto conjugato privatur. Eodem sensu Parabolam quoque *convergentem*, *divergentem*, *cruribus contrariis præditam*, *cruciformem*, *nodatam*, *cuspidatam*, *punctatam* et *puram* nominabimus.

In casu primo si terminus $a x^3$ affirmativus est, figura erit (*fig.* 5.) Hyperbola triplex cùm sex cruribus Hyperbolicis, quæ juxtà tres Asymptotos, quarum nullæ sunt parallelæ, in infinitum progrediuntur, binæ juxtà unamquamque in plagas contrarias. Et hæ Asymptoti, si terminus $b x^2$ non deest, se mutuò secabunt in tribus Punctis Triangulum D d δ inter se continentes, sin terminus $b x^2$ deest, conver-

gent omnes ad idem punctum. In priori casu TAB. I. cape A D $= \frac{-b}{2a}$ et A d = A δ = $\frac{b}{2\sqrt{a}}$, ac junge D d, D δ, et erunt A d, D d, D δ, tres Asymptoti. In posteriori (*fig.* 6.) duc ordinatam quamvis B C, ordinatæ principali A G parallelam, et in eâ utrinque productâ cape hinc indè B F, et B f sibi mutuò æquales, et in eâ ratione ad A B, quam habet $\sqrt{a}$ ad 1, jungeque A F, A f; et erunt A G, A F, A f tres Asymptoti. Hanc Hyperbolam vocamus *Redundantem*, quia numero crurum Hyperbolicorum sectiones conicas superat.

In Hyperbolâ omni redundante, si neque terminus ey desit, neque sit $bb - 4ac$ æquale $\pm 4ae\sqrt{a}$, Curva nullam habebit Diametrum; sin eorum alterutrum accidit, Curva habebit unicam Diametrum, et tres si utrumque. Diameter autem semper transit per intersectionem duarum Asymptotôn, et bisecat rectas omnes, quæ ad Asymptotos illas utrinque terminantur et parallelæ sunt Asymptoto tertiæ. Estque abscissa A B Diameter figuræ quoties terminus ey deest. Diametrum verò absolutè dictam hìc et in sequentibus in vulgari significatu usurpo, nempe pro abscissâ, quæ passim habet ordinatas binas æquales ad idem punctum hinc indè insistentes.

TAB. I.

I V.

Enumeratio Curvarum.

1. *De Hyperbolis novem redundantibus, quæ Diametro destituuntur et tres habent Asymptotos Triangulum capientes.*

Si Hyperbola redundans nullam habet Diametrum, quærantur æquationis hujus

$$a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + \tfrac{1}{4} e e = 0$$

radices quatuor seu valores ipsius *x*. Eæ sunto (*fig.* 5. &c.) A P, A ϖ, A π, A p. Erigantur ordinatæ P T, ϖ τ, π ι, p t, et hæ tangent Curvam in punctis totidem T, τ, ι, et tangendo dabunt limites Curvæ, per quos species ejus innotescet.

Nam, si radices omnes A P, A ϖ, A π, A p, (*fig.* 5. 7.) sunt reales, ejusdem signi et inæquales, Curva constat ex tribus Hyperbolis, (inscriptâ, circumscriptâ et ambigenâ) cum *Ovali*. Hyperbolarum una jacet versùs D, altera versùs d, tertia versùs δ, et Ovalis semper jacet intra Triangulum D d δ, atque etiam inter medios limites ι et τ, in quibus utique tangitur ab ordinatis π ι et ϖ τ. Et hæc est *species prima*.

Si è radicibus duæ maximæ A π, A p, (*fig.* 8.) vel duæ minimæ A P, A ϖ, (*fig.* 9.) æquantur

inter se, et ejusdem sunt signi cum alteris TAB. I. duobus, Ovalis et Hyperbola circumscripta sibi invicem junguntur, coeuntibus earum Punctis contactûs 1, et t, vel T, et τ, et crura Hyperbolæ sese decussando in Ovalem continuantur, figuram *Nodatam* efficientia. Quæ *species* est *secunda.*

Si è radicibus tres maximæ A p, A π, A ϖ, (*fig.* 10.) vel tres minimæ A π, A ϖ, A P, (*fig.* 11.) æquentur inter se, Nodus in *Cuspidem* acutissimum convertetur. Nam, crura duo Hyperbolæ circumscriptæ ibi in Angulo contactûs concurrent, et non ultrà producentur. Et hæc est *species tertia.*

Si è radicibus duæ mediæ A ϖ et A π (*fig.* 12.) æquentur inter se, Puncta contactûs τ, et 1 coincidunt, et propterea Ovalis interjecta in Punctum evanuit, et constat figura ex tribus Hyperbolis, inscriptâ, circumscriptâ et ambigenâ cum *Puncto* conjugato. Quæ est *species quarta.*

Si duæ ex racidibus sunt impossibiles et reliquæ duæ inæquales, et ejusdem signi (nam signa contraria habere nequeunt,) *Puræ* habebuntur Hyperbolæ tres sine ovali, vel nodo vel cuspide, vel puncto conjugato, et hæ Hyperbolæ, vel ad latera trianguli ab Asymptotis comprehensi, vel ad angulos ejus

TAB. I. jacebunt; et perindè *speciem*, vel *quintam* (*fig.* 12. 13.), vel *sextam* (*fig.* 14. 15.) constituent.

TAB. II. Si è radicibus duæ sunt æquales, et alteræ duæ, vel impossibiles sunt (*fig.* 16. 18.), vel reales (*fig.* 17. 19.) cum signis, quæ à signis æqualium radicum diversa sunt, Figura *Cruciformis* habebitur, nempe duæ ex Hyperbolis se invicem decussabunt, idque, vel ad verticem Trianguli ab Asymptotis comprehensi (*fig.* 18. 19.), vel ad ejus basem (*fig.* 16. 17.) Quæ duæ *species* sunt *septima* et *octava*.

Si deniquè radices omnes sunt impossibiles (*fig.* 20.), vel si omnes sunt reales, et inæquales (*fig.* 21.), et earum duæ sunt affirmativæ, et alteræ duæ negativæ, tunc duæ habebuntur Hyperbolæ ad angulos oppositos duarum Asymptotôn cum Hyperbolâ *Anguineâ* circà Asymptoton tertiam. Quæ *species* est *nona*.

Et hi sunt omnes radicum casus possibiles. Nam, si duæ radices sunt æquales inter se, et aliæ duæ sunt etiam inter se æquales, figura evadet sectio conica cum lineâ rectâ.

TAB. II.

2. *De Hyperbolis duodecim redundantibus unicam tantùm Diametrum habentibus.*

Si Hyperbola redundans habet unicam tantùm Diametrum, sit ejus Diameter Abscissa A B, et æquationis hujus

$$a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$$

quære tres radices seu valores x.

Si radices illæ sunt omnes reales, ejusdem signi, figura constabit ex *Ovali* intrà Triangulum D d δ (*fig.* 22.) jacente et tribus Hyperbolis ad angulos ejus, nempè circumscriptâ ad angulum D, et inscriptis duabus ad angulos d et δ. Et hæc est *species decima.*

Si radices duæ majores sunt æquales, et tertia ejusdem signi, crura Hyperbolæ jacentis versùs D (*fig.* 23.) se se decussabunt in formâ *Nodi* propter contactum Ovalis. Quæ *species* est *undecima.*

Si tres radices sunt æquales, Hyperbola ista fit *Cuspidata* sine Ovali (*fig.* 24.). Quæ *species* est *duodecima.*

Si radices duæ minores sunt æquales et tertia ejusdem signi, Ovalis in Punctum evanuit; (*fig.* 25.) Quæ *species* est *decima-tertia.*

In speciebus quatuor novissimis Hyperbola, quæ jacet versùs D, Asymptotos in sinu suo amplectitur, reliquæ duæ in sinu Asymptotôn jacent.

TAB. II. Si duæ ex radicibus sunt impossibiles, habebuntur tres Hyperbolæ *Puræ*, sine Ovali, Decussatione, vel Cuspide. Et hujus casûs *species* sunt quatuor: nempe *decima quarta*, si Hyperbola circumscripta jacet versùs D, (*fig.* 25.) et *decima-quinta*, si Hyperbola inscripta jacet versùs D, (*fig.* 26.) et *decima-sexta*, si Hyperbola circumscripta jacet sub basi d δ Trianguli D d δ, (*fig.* 27.) et *decima-septima*, (*fig.* 28), si Hyperbola inscripta jacet sub eadem basi.

Si duæ radices sunt æquales, et tertia signi diversi, figura erit *Cruciformis*. Nempe, duæ ex tribus Hyperbolis se invicem decussabunt: idque, vel ad verticem Trianguli ab Asymptotis comprehensi, (*fig.* 29.) vel ad ejus basem, (*fig.* 30.) Quæ duæ *species* sunt *decima-octava*, et *decima-nona*.

Si duæ radices sunt inæquales, et ejusdem signi, et tertia est signi diversi, duæ habebuntur Hyperbolæ in oppositis angulis duarum Asymptotôn cum *Conchoidali* intermediâ. *Conchoïdalis* autem, vel jacebit ad easdem partes Asymptoti suæ cum Triangulo ab Asymptotis constituto, (*fig.* 31.) vel ad partes contrarias (*fig.* 32.). Et hi duo casus constituunt *speciem vigesimam*, et *vigesimam primam*.

3. De

3. *De Hyperbolis duabus redundantibus cum tribus Diametris.* TAB. III.

Hyperbola redundans, quæ habet tres Diametros, constat ex tribus Hyperbolis in sinubus Asymptotôn jacentibus; idque vel ad angulos Trianguli ab Asymptotis comprehensi (*fig.* 33.), vel ad ejus latera (*fig.* 34.). Casus prior dat *speciem vigesimam secundam*, et posterior *speciem vigesimam tertiam.*

4. *De Hyperbolis novem redundantibus cum Asymptotis tribus ad commune punctum convergentibus.*

Si tres Asymptoti in puncto communi se mutuò decussant, vertuntur species quinta et sexta in *vigesimam quartam*; (*fig.* 6.) septima et octava in *vigesimam quintam*, (*fig.* 35.) et nona in *vigesimam sextam*, (*fig.* 36.) ubi anguinea non transit per concursum Asymptotôn; et in *vigesimam septimam*, ubi transit per concursum illum, (*fig.* 37.), quo casu termini *b* ac *d* desunt, et concursus Asymptotôn est Centrum figuræ ab omnibus ejus partibus oppositis æqualiter distans. Et hæ quatuor species Diametrum non habent.

Vertuntur etiam *species* decima quarta, ac decima sexta in *vigesimam octavam* (*fig.* 38.),

TAB. III. decima quinta, ac decima septima in *vigesimam nonam* (*fig.* 39.), decima octava et decima nona in *tricesimam* (*fig.* 40.); et vigesima cum vigesimâ primâ in *tricesimam primam*, (*fig.* 41.). Et hæ species unicam habent Diametrum.

Ac denique species vigesima secunda et vigesima tertia vertuntur in *speciem tricesimam secundam*, cujus tres sunt Diametri per concursum Asymptotôn transeuntes (*fig.* 42.)

Quæ omnes conversiones facillimè intelliguntur faciendo, ut Triangulum ab Asymptotis comprehensum diminuatur, donec in punctum evanescat.

5. *De Hyberbolis sex defectivis Diametrum non habentibus.*

Si in primo æquationum casu terminus $a x^3$ negativus est, figura erit Hyperbola defectiva unicam habens Asymptoton, et duo tantùm crura hyperbolica juxtà Asymptoton illam in plagas contrarias infinitè progredientia. Et Asymptotos illa est Ordinata prima, et principalis A G (*fig.* 43.). Si terminus $e y$ non deest, figura nullam habebit Diametrum, si deest habebit unicam. In priori casu species sic enumerantur.

Si æquationis hujus

$$a x^4 = b x^3 + c x^2 + d x + \tfrac{1}{4} e^2.$$

radices omnes Aπ, AP, Ap, Aϖ, sunt reales, et inæquales, figura erit Hyperbola anguinea Asymptoton flexu contrario amplexa, cum Ovali conjugatâ. Quæ *species* est *tricesima tertia.* TAB. III.

Si radices duæ mediæ AP, et Ap, (*fig.* 44.) æquentur inter se, ovalis et anguinea junguntur sese decussantes in formâ *nodi.* Quæ est *species tricesima quarta.*

Si tres radices sunt æquales, nodus vertetur in cuspidem acutissimum in vertice Anguineæ (*fig.* 45.), et hæc est *species tricesima quinta.*

Si è tribus radicibus ejusdem signi, duæ maximæ, Ap, et Aϖ (*fig.* 47.) sibi mutuò æquantur, ovalis in *Punctum* evanuit. Quæ *species* est *tricesima sexta.*

Si radices duæ quævis imaginariæ sunt, sola manebit anguinea *Pura* sine ovali, decussatione, cuspide, vel puncto conjugato. Si anguinea illa non transit per punctum A, (*fig.* 46.) *species* est *tricesima septima*, sin transit per punctum illud A (id quod contingit, ubi termini *b* ac *d* desunt,) punctum illud A erit centrum figuræ rectas omnes per ipsum ductas, et ad curvam utrinque terminatas, bisecans (*fig.* 47.). Et hæç est *species tricesima octava.*

TAB. IV.

6. *De Hyperbolis septem defectivis Diametrum habentibus.*

In altero casu, ubi terminus ey deest, et propterea figura Diametrum habet, si æquationis hujus $ax^3 = bx^2 + cx + d$, radices omnes AT, At, Aτ, (*fig.* 48.) sunt reales, inæquales, et ejusdem signi, figura erit Hyperbola conchoidalis cum *Ovali* ad convexitatem. Quæ est *species tricesima nona.*

Si duæ radices sunt inæquales, et ejusdem signi, et tertia est signi contrarii, ovalis jacebit ad concavitatem conchoidalis (*fig.* 49.); estque *species quadragesima.*

Si radices duæ minores AT, At (*fig.* 50.) sunt æquales, et tertia Aτ est ejusdem signi, ovalis, et conchoidalis jungentur sese decussando in modum *nodi.* Quæ *species* est *quadragesima prima.*

Si tres radices sunt æquales, nodus mutabitur in *cuspidem* et figura erit *Cissois veterum,* (*fig.* 51.). Et hæc est *species quadragesima secunda.*

Si radices duæ majores sunt æquales, et tertia est ejusdem signi, conchoidalis habebit *Punctum* conjugatum ad convexitatem suam (*fig.* 53.), estque *species quadragesima tertia.*

Si radices duæ sunt æquales, et tertia est

signi contrarii, conchoidalis habebit punctum conjugatum ad concavitatem suam (*fig.* 53.), estque *species quadragesima quarta*. TAB. IV.

Si radices duæ sunt impossibiles habebitur conchoidalis *Pura* sine ovali, nodo, cuspide, vel puncto conjugato (*fig.* 52 et 53.) quæ *species* est *quadragesima quinta*.

7. *De Hyperbolis septem parabolicis Diametrum non habentibus.*

Si quando in primo æquationum casu terminus $a x^3$ deest, et terminus $b x$ non deest, figura erit hyperbola parabolica duo habens crura hyperbolica ad unam Asymptoton S A G et duo parabolica in plagam unam et eandem convergentia. Si terminus $e y$ non deest, figura nullam habebit Diametrum; sin deest, habebit unicam. In priori casu species sunt hæ.

Si tres radices A P, A ϖ, A π (*fig.* 54.) æquationis ejus $b x^3 + c x^2 + d x + \frac{1}{4} e^2 = 0$ sunt inæquales et ejusdem signi, figura constabit ex *ovali*, et aliis duabus curvis, quæ partim hyperbolicæ sunt, et partim parabolicæ. Nempe crura parabolica continuò ductu junguntur cruribus hyperbolicis sibi proximis. Et hæc est *species quadragesima sexta*.

Si radices duæ minores sunt æquales, et ter-

TAB. IV. tia est ejusdem signi, ovalis et una curvarum illarum hyperbolo-parabolicarum junguntur et se decussant in formam *nodi* (*fig.* 55.) quæ *species est quadragesima septima*.

Si tres radices sunt æquales, nodus ille in cuspidem vertitur (*fig.* 56.) estque *species quadragesima octava*.

Si radices duæ majores sunt æquales, et tertia est ejusdem signi, Ovalis in *Punctum* conjugatum evanuit (*fig.* 57.) Quæ *species* est *quadragesima nona*.

Si duæ radices sunt impossibiles, manebunt *Puræ* duæ illæ Curvæ hyperbolo-parabolicæ sine ovali, decussatione, cuspide, vel puncto conjugato; et *speciem quinquagesimam* constituent. (*fig.* 57 et 58.).

Si radices duæ sunt æquales, et tertia est signi contrarii, curvæ illæ hyperbolo-parabolicæ junguntur sese decussando in morem crucis (*fig.* 59.). Estque *species quinquagesima prima*.

Si radices duæ sunt inæquales, et ejusdem signi, et tertia est signi contrarii, figura evadet Hyperbola anguinea circà Asymptoton A G, (*fig.* 60.) cum Parabolâ conjugatâ. Et hæc est *species quinquagesima secunda*.

8. *De Hyperbolis quatuor parabolicis Diametrum habentibus.*

TAB. V.

In altero casu, ubi terminus ey deest, et figura Diametrum habet, si duæ radices æquationis hujus $bx^2 + cx + d = 0$ sunt impossibiles, duæ habentur figuræ hyperbolo-parabolicæ à Diametro A B (*fig.* 61.) hinc inde æqualiter distantes. Quæ *species* est *quinquagesima tertia.*

Si æquationis illius radices duæ sunt reales et æquales, figuræ hyperbolo-parabolicæ junguntur sese decussantes in morem crucis; et *speciem quinquagesimam quartam* constituunt. (*fig.* 62.).

Si radices illæ sunt inæquales et ejusdem signi, habetur hyperbola conchoidalis cùm parabolâ ex eodem latere Asymptoti. (*fig.* 63.) Estque *species quinquagesima quinta.*

Si radices illæ sunt signi contrarii, habetur conchoidalis cum parabolâ ad alteras partes Asymptoti (*fig.* 64.). Quæ *species* est *quinquagesima sexta.*

9. *De quatuor Hyperbolismis Hyperbolæ.*

Si quando, in primo æquationum casu, terminus uterque ax^3 et bx^2 deest, figura erit hyperbolismus sectionis alicujus conicæ. *Hy-*

TAB. V. *perbolismum* figuræ voco, cujus ordinata prodit applicando contentum sub ordinatâ figuræ illius et rectâ datâ ad Abscissam communem. Hac ratione Linea recta vertitur in hyperbolam conicam, et sectio omnis conica vertitur in aliquam figurarum, quas hìc hyperbolismos sectionum conicorum voco. Nam, æquatio ad figuras, de quibus agimus, nempe

$$xy^2 + ey = cx + d,$$

dat $y = \frac{-e \pm \sqrt{(e^2 + 4dx + 4cx^2)}}{2x}$; quæ generatur applicando contentum sub ordinatâ sectionis conicæ $\frac{-e \pm \sqrt{(e^2 + 4dx + 4cx^2)}}{2m}$, et rectâ datâ m ad Curvarum abscissam communem x. Undè liquet, quòd figura genita hyperbolismus erit Hyperbolæ, Ellipseos, vel Parabolæ, perinde ut terminus cx affirmativus est, vel negativus, vel nullus.

Hyperbolismus Hyperbolæ tres habet Asymptotos, quarum una est ordinata prima principalis A d (*fig.* 65.), alteræ duæ sunt parallelæ abscissæ A B, ab eâdem hinc indè æqualiter distant. In ordinatâ principali A d, cape A d, A δ, hinc indè æquales quantitati $\sqrt{c}$; et per puncta d, ac δ age dg, $\delta\gamma$ Asymptotos abscissæ A B parallelas.

Ubi terminus ey non deest, figura nullam

habet Diametrum. In hoc casu, si æquationis hujus $cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2 = 0$, radices duæ A P, A p sunt reales et inæquales, (nam æquales esse nequeunt nisi figura sit conica sectio) figura constabit ex tribus hyperbolis sibi oppositis, quarum una jacet inter Asymptotos parallelas, et alteræ duæ jacent extrà. Et hæc est *species quinquagesima septima*. TAB. V.

Si radices illæ duæ sunt impossibiles, habentur hyperbolæ duæ oppositæ extrà Asymptotos parallelas et anguinea hyperbolica intrà easdem. Hæc figura duarum est specierum. Nam, Centrum non habet, ubi terminus d non deest (*fig.* 66.) : sed si terminus ille deest, punctum A est ejus Centrum (*fig.* 67.). Prior *species* est *quinquagesima octava*, posterior *quinquagesima nona*.

Quòd si terminus ey deest, figura constabit ex tribus hyperbolis oppositis, quarum una jacet inter Asymptotos parallelas, et alteræ duæ jacent extrà, ut in specie quinquagesimâ septimâ, et prætereà Diametrum habet, quæ est abscissa A B (*fig.* 68.). Et hæc est *species sexagesima*.

TAB. V.

10. *De tribus Hyperbolismis Ellipseos.*

Hyperbolismus Ellipseos per hanc æquationem definitur $xy^2 + ey = cx + d$, et unicam habet Asymptoton, quæ est ordinata principalis A d (*fig.* 69.). Si terminus ey non deest, figura est Hyperbola anguinea sine Diametro; atque etiam sine Centro, si terminus d non deest. Quæ *species* est *sexagesima prima*.

At si terminus d deest, figura habet Centrum sine Diametro, et Centrum ejus est Punctum A (*fig.* 70.) *species* verò est *sexagesima secunda*.

Et, si terminus ey deest et terminus d non deest, figura est conchoidalis ad Asymptoton A G (*fig.* 71.), habetque Diametrum sine centro, et Diameter ejus est abscissa A B. Quæ *species* est *sexagesima tertia*.

11. *De duobus Hyperbolismis Parabolæ.*

Hyperbolismus Parabolæ per hanc æquationem definitur $xy^2 + ey = d$, et duas habet Asymptotos, abscissam A B, et ordinatam primam et principalem A G. Hyperbolæ verò in hac figurâ sunt duæ, non in Asymptotôn angulis oppositis, sed in angulis qui sunt deinceps jacentes, idque ad utrumque latus abscissæ A B, et, vel sine Diametro, si terminus ey habetur (*fig.* 72.), vel cum Diametro, si terminus ille deest (*fig.* 73.). Quæ duæ *species* sunt *sexagesima quarta* et *sexagesima quinta*.

12. De Tridente.

TAB. VI.

In secundo æquationum casu habebatur æquatio $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Et figura in hoc casu habet quatuor crura infinita, quorum duo sunt hyperbolica circà Asymptoton AG (*fig.* 74.) in contrarias partes tendentia, et duo parabolica convergentia, et cum prioribus speciem tridentis ferè efformantia. Estque hæc figura parabola illa, per quam CARTESIUS æquationes sex dimensionum construxit. Hæc est igitur *species sexagesima sexta.*

13. *De Parabolis quinque divergentibus.*

In tertio casu æquatio erat

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

et parabolam designat, cujus crura divergunt ab invicem, et in contrarias partes infinitè progrediuntur. Abscissa AB est ejus Diameter, et species ejus sunt quinque sequentes.

Si æquationis $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, radices omnes $A\tau$, AT, At, sunt reales et inæquales, figura est Parabola divergens campaniformis cum *ovali* ad verticem (*fig.* 75. 76.). Et *species* est *sexagesima septima.*

Si radices duæ sunt æquales, Parabola prodit, vel *nodata* contingendo ovalem (*fig.* 77.), vel *punctata*, ob ovalem infinitè parvam (*fig.* 78.). Quæ duæ *species* sunt *sexagesima octava*, et *sexagesima nona.*

TAB. VI. Si tres radices sunt æquales, Parabola erit *cuspidata* in vertice (*fig.* 80.) et hæc est parabola *Neiliana*, quæ vulgò *semicubica* dicitur. Et est *species septuagesima*.

Si radices duæ sunt impossibiles, habetur Parabola *Pura* campaniformis (*fig.* 78. 79.) *speciem septuagesimam primam* constituens.

14. *De Parabolâ cubicâ.*

In quarto casu æquatio erat

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

et hæc æquatio parabolam designat, quæ crura habet contraria, et *cubica* dici solet (*fig.* 81.). Et sic *species* omnino sunt *septuaginta duæ*.

V.

Genesis Curvarum per Umbras.

Si in Planum infinitum à puncto lucido illuminatum Umbræ figurarum projiciantur, Umbræ sectionum conicarum semper erunt sectiones conicæ; eæ Curvarum secundi Generis semper erunt Curvæ secundi Generis; eæ Curvarum tertii Generis semper erunt Curvæ tertii Generis, et sic deinceps in infinitum.

Et, quemadmodum circulus, Umbram projiciendo, generat sectiones omnes conicas, sic Parabolæ quinque divergentes Umbris suis

generant et exhibent alias omnes secundi generis Curvas; et sic Curvæ quædam simpliciores aliorum Generum inveniri possunt, quæ alias omnes eorumdem Generum Curvas Umbris suis à Puncto lucido in Planum projectis formabunt. TAB. VI.

De Curvarum Punctis duplicibus.

Diximus Curvas secundi Generis à Lineâ rectâ in Punctis tribus secari posse. Horum duo nonnunquam coincidunt. Ut, cùm recta per ovalem infinitè parvam transit vel per concursum duarum partium Curvæ se mutuò secantium, vel in cuspidem coeuntium ducitur. Et, si quando rectæ omnes in plagam cruris alicujus infiniti tendentes Curvam in unico tantùm Puncto secant, (ut fit in ordinatis Parabolæ *Cartesianæ*, et Parabolæ cubicæ, nec non in rectis abscissæ hyperbolismorum Hyperbolæ, et Parabolæ parallelis) concipiendum est, quòd rectæ illæ per alia duo Curvæ puncta ad infinitam distantiam sita (ut ita dicam) transeunt. Hujusmodi intersectiones duas coincidentes, sive ad finitam sint distantiam sive ad infinitam, vocabimus *Punctum Duplex*. Curvæ autem, quæ habent Punctum Duplex describi possunt per sequentia Theoremata.

TAB. VI.

VI.

De Curvarum Descriptione Organicâ.

THEOR. I.

Si (*fig.* 82.) Anguli duo magnitudine dati PAD, PBD, circà polos positione datos A, B, rotentur, èt eorum crura AP, BP, concursu suo P percurrant Lineam rectam; crura duo reliqua AD, BD concursu suo D describent sectionem conicam per polos A, B, transeuntem: præterquàm ubi Linea illa recta transit per polorum alterutrum A vel B, vel Anguli BAD, ABD simul evanescunt, quibus in casibus punctum D describit Lineam rectam.

THEOR. II.

Si (*fig.* 83.) crura AP, BP concursu suo P percurrant sectionem conicam per polum alterum A transeuntem, crura duo reliqua AD, BD concursu suo describent Curvam secundi Generis per Polum alterum B transeuntem, et Punctum Duplex habentem in Polo primo A, per quem sectio conica transit: præterquàm ubi Anguli BAD, ABD simul evanescunt, quo casu Punctum D describet aliam sectionem conicam per polum A transeuntem.

TAB. VI.

THEOR. III.

At si sectio conica, quam punctum P percurrit transeat per neutrum polorum A, B; (*fig.* 84.) punctum D describet Curvam secundi, vel tertii generis punctum duplex habentem. Et punctum illud duplex in concursu crurum describentium, A D, B D invenietur, ubi anguli B A P, A B P simul evanescunt. Curva autem descripta secundi erit generis, si anguli B A D, A B D simul evanescunt, aliàs erit tertii generis, et alia duo habebit puncta duplicia in polis A et B.

Sectionum Conicarum descriptio per data quinque puncta.

Jam sectio conica determinatur ex datis ejus punctis quinque, et per eadem sic describi potest. Dentur (*fig.* 85.) ejus puncta quinque A, B, C, D, E. Jungantur eorum tria quævis A, B, C, et trianguli A B C rotentur anguli duo quivis C A B, C B A circà vertices suos A et B; et, ubi crurum A C, B C intersectio C successivè applicatur ad puncta duo reliqua D, E, incidat intersectio crurum reliquorum A B et B A in puncta P et Q. Agatur et infinitè producatur recta P Q, et anguli mobiles ità rotentur, ut intersectio cru-

TAB. VI. rum A B, B A percurrat rectam P Q, et crurum reliquorum intersectio C describet propositam sectionem conicam per Theorema primum.

Curvarum secundi generis punctum duplex habentium descriptio per data septem puncta.

Curvæ omnes secundi Generis punctum duplex habentes determinantur ex datis earum punctis septem, quorum unum est punctum illud duplex, et per eadem puncta sic describi possunt. Dentur (*fig.* 86.) Curvæ describendæ puncta quælibet septem A, B, C, D, E, F, G, quorum A est punctum duplex. Jungantur punctum A, et alia duo quævis è punctis, puta B et C; et Trianguli A B C rotetur tum angulus C A B circà verticem suum A, tum angulorum reliquorum alteruter A B C circà verticem suum B. Et, ubi crurum A C, B C concursus C successivè applicatur ad puncta quatuor reliqua D, E, F, G, incidat concursus crurum reliquorum A B, et B A in puncta quatuor P, Q, R, S. Per puncta illa quatuor et quintum A describatur sectio conica; et anguli præfati C A B, C B A ita rotentur, ut crurum A B, B A concursus percurrat sectionem illam conicam, et concursus reliquorum crurum A C, B C describet curvam propositam per Theorema secundum.

Si,

Si, vice puncti C datur positione recta B C, quæ Curvam describendam tangit in B, lineæ A D, A P coincident, et vice anguli D A P habebitur linea recta circà polum A rotanda.

Si Punctum Duplex A infinitè distat, debebit recta ad plagam puncti illius perpetuò dirigi, et motu parallelo ferri intereà dùm angulus A B C circà polum B rotatur.

Describi etiam possunt hæ Curvæ paulò aliter per Theorema tertium, sed descriptionem simpliciorem posuisse sufficit.

Eadem methodo Curvas tertii, quarti, et superiorum Generum describere licet, non omnes quidem, sed quotquot ratione aliquâ commodâ per motum localem describi possunt. Nam, Curvam aliquam secundi, vel superioris Generis punctum duplex non habentem commodè describere, Problema est inter difficiliora numerandum.

VII.

Constructio Æquationum per Descriptionem Curvarum.

Curvarum usus in Geometriâ est, ut per earum intersectiones Problemata solvantur. Proponatur æquatio construenda dimensionum novem.

$$x^9 * + b x^7 + c x^6 + d x^5 + e x^4 + \begin{matrix} f \\ + m \end{matrix} x^3 + g x^2 + h x + k = 0.$$

Ubi b, c, d, &c. significant quantitates quasvis datas signis suis + et − affectas. Assumatur æquatio ad Parabolam cubicam $x^3 = y$, et æquatio prior, scribendo y pro x^3, evadet

$$y^3 + b x y^2 + c y^2 + d x^2 y + e x y + m y + f x^3 + g x^2 + h x + k = 0.$$

Æquatio ad Curvam aliam secundi generis, ubi m, vel f deesse potest, vel pro lubitu assumi. Et per harum Curvarum descriptiones et intersectiones dabuntur radices æquationis construendæ. Parabolam cubicam semel describere sufficit.

Si æquatio construenda per defectum duorum terminorum ultimorum $h x$, et k reducatur ad septem dimensiones, Curva altera delendo m, habebit punctum duplex in principio abscissæ, et indè facilè describi potest, ut suprà.

Si æquatio construenda per defectum terminorum trium ultimorum $gx^2 + hx + k$ reducatur ad sex dimensiones, Curva altera, delendo f, evadet sectio conica.

Et si per defectum sex ultimorum terminorum, æquatio construenda reducatur ad tres dimensiones, incidetur in constructionem *Wallisianam* per Parabolam cubicam et Lineam rectam.

Construi etiam possunt æquationes per hyperbolismum Parabolæ cum Diametro. Ut, si construenda sit hæc æquatio dimensionum novem termino penultimo carens,

$$a + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 \begin{smallmatrix} + g \\ + m \end{smallmatrix} x^6 + hx^7 + kx^8 + lx^9 = 0;$$

Assumatur æquatio ad hyperbolismum illum $x^2y = 1$, et scribendo y pro $\frac{1}{x^2}$, æquatio construenda vertetur in hanc

$$ay^3 + cy^2 + dxy^2 + ey + fxy + m + g + hx + kx^2 + lx^3 = 0,$$

quæ Curvam secundi Generis designat, cujus descriptione Problema solvetur. Et quantitatum m ac g alterutra hìc deesse potest, vel pro lubitu assumi.

Per Parabolam cubicam et Curvas tertii Generis construuntur etiam æquationes omnes dimensionum non plusquam duodecim, et per

eandem Parabolam et Curvas quarti Generis construuntur omnes dimensionum non plusquam quindecim; et sic deinceps in infinitum. Et Curvæ illæ, tertii, quarti, et superiorum Generum describi semper possunt inveniendo eorum puncta per Geometriam planam. Ut si constuenda sit æquatio

$$x^{12} * + a x^{10} + b x^{9} + c x^{8} + d x^{7} + e x^{6} + f x^{5} + g x^{4} + h x^{3} + i x^{2} + k x + l = 0,$$

et descripta habeatur Parabola cubica: sit æquatio ad Parabolam illam cubicam $x^3 = y$, et scribendo y pro x^3, æquatio constuenda vertetur in hanc

$$\begin{array}{lllll} y^4 + a x y^3 & + c x^2 y^2 & + f x^2 y & + i x^2 & = 0 \\ \quad + b & + d x & + g x & + k x & \\ & + e & + h & + l & \end{array}$$

quæ est æquatio ad Curvam tertii Generis; cujus descriptione Problema solvetur. Describi autem potest hæc Curva inveniendo ejus puncta per Geometriam planam, propterea quod indeterminata quantitas x non nisi ad duas dimensiones ascendit.

FINIS.

LINEÆ
TERTII ORDINIS
NEWTONIANÆ,

SIVE

ILLUSTRATIO TRACTATUS D. NEWTONI

DE ENUMERATIONE

LINEARUM TERTII ORDINIS.

CUI SUBJUNGITUR,

SOLUTIO TRIUM PROBLEMATUM

AUTHORE

Jac. STIRLING, è Coll. Ball. *Oxon.*

LINEÆ
TERTII ORDINIS
NEWTONIANÆ.

DEFINITIONES.

1. *Linea Geometrica* est cujus abscissæ et ordinatæ correspondentes eandem inter se ubique obtinent relationem.
2. *Linea rationalis* est cujus abscissæ et ordinatæ relationem obtinent æquatione vulgari algebraïcâ designabilem.
3. *Linea irrationalis* est quando relatio illa æquatione istiusmodi exprimi nequit.
4. *Asymptotos* curvæ est Linea simplicissima, sive curva sive recta sit, quæ ad curvæ crus tanto magis continuè accedit quanto magis producitur, tandem cum eo coincidens.
5. *Crura ejusdem generis* sunt quæ pro Asymptotis suis sortiuntur lineas ejusdem speciei.
6. *Hyperbola inscripta* est quæ tota jacet in Asymptotôn angulo: adinstar hyperbolæ conicæ.

7. *Circumpscripta* est quæ Asymptotos secat et partes abscissas in sinu suo complectitur.

8. *Ambigena* est quæ uno crure *inscribitur* et altero *circumscribitur*.

9. *Conchois* est figura habens duo crura ad easdem ejusdem Asymptoti partes jacentia, et in plagas oppositas protensa, cum vertice versus Asymptoton concavo.

10. *Anguinea* vero est figura, quando crura jacent ad diversas Asymptoti partes.

11. Figura *Cruciformis* est, quando quatuor ejus crura in uno puncto conveniunt.

12. *Nodata* est, quando duo crura se invicem decussant, *nodum* quasi efficientia.

13. *Cuspidata* est, quando crura in eorum conjunctione *cuspidem* efficiunt.

14. *Punctata* est quæ *ovalem* habet conjugatam infinite parvam, id est, punctum.

15. *Pura* est quæ *ovali*, *nodo*, *cuspide* et *puncto conjugato* privatur.

Linearum Rationalium Ordines.

Linearum Rationalium obvia est divisio, ab ipsarum naturis desumpta, in simpliciores scilicet et magis compositas pro ratione dimensionum æquationis, quâ relatio inter abscissas et ordinatas definitur; quando quidem æquatio illa simplicissima est in quâ quantitates indeterminatæ sunt pauciorum dimensionum. Quâ ratione generalissima æquatio alicujus ordinis comprehendit omnes lineas ejusdem.

Ergo linea primi ordinis erit recta sola æquatione $y + ax + b = 0$ designata,

Eas secundi ordinis designat

$$y^2 + (ax + b)y + cx^2 + dx + e = 0,$$

Eas tertii

$$y^3 + (ax + b)y^2 + (cx^2 + dx + e)y + fx^3 + gx^2 + hx + k = 0,$$

Eas quarti

$$y^4 + (ax + b)y^3 + (cx^2 + dx + e)y^2 + (fx^3 + gx^2 + hx + k)y + lx^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0,$$

Eas quinti

$$y^5 + (ax + b)y^4 + (cx^2 + dx + e)y^3 + (fx^3 + gx^2 + hx + k)y^2 + (lx^4 + mx^3 + nx^2 + px + q)y + rx^5 + sx^4 + tx^3 + ux^2 + vx + w = 0,$$

et sic proceditur in infinitum.

In hisce æquationibus x est Abscissa, y Ordinata in quovis angulo ad se invicem incli-

natæ; a, b, c, d, &c. quantitates datæ signis suis $+$ et $-$ affectæ, quarum una vel plures deesse possunt, modo ex tali defectu, linea non migret in aliam ordinis inferioris.

Hæ æquationes sunt sui ordinis generalissimæ; continent quippe omnes abscissæ et ordinatæ combinationes, ubi earum dimensiones in uno æquationis termino simul sumptæ non superant dimensionem maximam ordinatæ. Etenim dimensio Curvæ pendet ex maximâ dimensione abscissæ et ordinatæ in eodem æquationis termino.

Numerus coefficientium in illis æquationibus.

Per coefficientes hìc intellige quantitates datas a, b, c, d, &c. Harum numerus in prima æquatione est 2, in secundâ 5, in tertiâ 9, in quartâ 14, in quintâ 20, et sic porro. Atque hi numeri sic generantur est $5 = 2 + 3$, $9 = 2 + 3 + 4$, $14 = 2 + 3 + 4 + 5$, $20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, &c. Adeoque ex Arithmeticâ summatoriâ universaliter facilè colligitur, quod si sit n numerus dimensionum Curvæ, erit $\frac{n^2 + 3n}{2}$ numerus coefficientium in æquatione generalissimâ lineas omnes illius ordinis definiente. Hujus usus in sequentibus patebit.

PROP. I. THEOR.

Omnis Linea Geometrica curvaturâ continuâ vel in se redit, vel pergit in infinitum.

Lineam Geometricam motu puncti continuo descriptam hìc considero; omnis enim linea geometrica motu puncti certâ quadam conditione constanti moventis describi potest: quum igitur motus puncti lege immutabili attemperatur, necessario durabit ejus motus in infinitum. Unde via percursa, id est, Linea Geometrica, vel in se redit, vel pergit in infinitum, idque curvaturâ continuâ ob regularem puncti motum. Q. E. D.

Coroll. 1. Superficies solidorum omnium Geometricorum, curvaturâ continuâ, vel in se redeunt, vel pergunt in infinitum. Nam superficies Geometricæ, eodem plane modo linearum motu genitæ concipiendæ sunt, quo Lineæ punctorum motu: adeoque hoc Corollarium et hæc propositio simili prorsus argumentandi genere demonstrantur.

Coroll. 2. Crura infinita alicujus lineæ ductu continuo semper conjunguntur. Nam punctum describens necessario transit ab uno crure ad aliud.

Coroll. 3. Et inde necessario sequitur, quod

crurum infinitorum numerus semper est par: aliàs enim servari nequit motus puncti continuus in infinitum.

Coroll. 4. Omnes rectæ parallelæ secant Curvam aliquam in iisdem numero punctis realibus et imaginariis. Hoc Corollarium facillimè patet ex propositione et Corollariis ejus secundo et tertio.

Coroll. 5. Unde si æquatio quælibet involvat duas indeterminatas, abscissam x et ordinatam y, numerus valorum possibilium et impossibilium ordinatæ y, in omni abscissæ magnitudine idem semper est. Hujus Corollarii beneficio invenire licet numerum radicum æquationis fluxiones involventis, ut et æquationis in quâ quantitates indeterminatæ indeterminatas habent etiam exponentes; ut posteà patebit.

Coroll. 6. Ex Lineæ Geometricæ curvaturâ continuâ, sequitur nota illa æquationum proprietas; scilicet quod radicum impossibilium numerus semper est par.

Serierum infinitarum frequens in sequentibus erit usus: visum est igitur aliquid de iisdem præfari, quum nec earum natura, nec methodus eas investigandi, ab aliquo quod sciam, huc usque satis explicata fuerit.

De serierum infinitarum ortu.

D. *Wallisius*, in *Arithmeticâ infinitorum*, anno 1655 publicatâ, multis exemplis particularibus generaliter tandem invenit, quod si ordinata curvæ sit $x^{\frac{m}{n}}$, erit ejus area $\frac{n}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$. Ope ejus regulæ quadravit omnes curvas quarum ordinatas habere potuit in terminis rationalibus expressas. D. *Newtonus* per interpolationem arearum ab ordinatis (per *Wallisii* regulam) deductarum quadravit circulum. Et ex datâ ejus areâ in serie infinitâ, per reversum regulæ *Wallisii* invenit ejus ordinatam in serie etiam infinitâ expressam. Et methodum interpolandi prosecutus, Theorema suum invenit pro elevando Binomio ad dignitatem quamvis indeterminatam : ut constat ex Epistolâ ejus ad D. *Oldenburgium* 13 junii anno 1676 missâ. Sed interpolationum methodum missam tandem faciens, operationes speciosas perindè ut Arithmeticas instituere cœpit, atque docuit reducere radices æquationum omnium, primo simplicium deinde affectarum, in series convergentes. Hoc patet ex ejus *Analysi* à *Barrovio* ad *Collinium* mense julio, anno 1669, missâ. In eadem *Analysi*, serierum ope, qua-

dravit curvas tum *geometricas* tum *mechanicas* ut appellari solent. Et docuit quâ ratione, ex datâ areâ vel longitudine curvæ inveniri possit Basis vel Ordinata. Sub finem ejusdem *Analyseos*, ope serierum universaliter demonstravit regulam *Wallisii*, methodo novâ quæ alia non erat quàm *fluxionum* methodus.

Cartesius, *Barrovius*, aliique in *Tangentium* methodis, docuerunt invenire rationes primas et ultimas quantitatum *Nascentium* et *Evanescentium*, at non generaliter; et *Wallisius*, uti mox dictum est, ostendit quomodo inveniri possit area ex datâ ordinatâ terminis rationalibus expressa : hæc erant dubia et obscura vestigia *fluxionum* methodi directæ et inversæ. Et impossibile fere erat, absque serierum doctrinâ, hanc methodum ulterius promovere, quam promoverunt præfati docti viri. Unde sanè non video quâ ratione quis possit *fluxionum* methodi inventionem sibi arrogare, et non etiam serierum inventionem.

De naturâ serierum.

Serierum methodus in eo fundatur, ut primo assumatur quantitas radici quæsitæ æqualis quam proximè, et corrigatur valor assumptus continue : quo pacto habebitur tandem quantitas, quæ à radicis vero valore minus dista-

bit quavis quantitate data. Hoc vero multifariam præstari potest.

Sit series eo citius convergens quo minor est x, scilicet

$$y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r} + \&c.$$

Ponamus esse x admodùm parvam, et terminus quilibet posterior erit priore multò minor, atque termini pauci initiales ad verum ipsius y valorem quàm proximè accedent. Quod si sit x infinitè parva, erit accuratè $y = Ax^n$, terminis reliquis hujus termini respectu evanescentibus. In æquatione relationem inter x et y definiente, suppone x etiam infinitè parvam, et termini quidam æquationis evadent reliquis infinitè minores, qui proindè reliquorum maximorum respectu evanescent; è terminis igitur maximis ejusdem ordinis tanquam nihilo æqualibus (eodem plane modo quo ex æquatione numerali) extrahe radicem, nam erit illa Ax^n: qui terminus primus proptereà dabitur. Per terminos maximos *ejusdem ordinis* intellige eos qui ad se invicem datam habent rationem, et sunt reliquis omnibus infinitè majores. Pone

$$p = Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r} + \&c.$$

terminis nondùm inventis, et erit $y = p + Ax^n$, quem ipsius y valorem in æquatione substituendo, obtinebis æquationem novam inde-

terminatas duas x, p involventem. In illa æquatione novâ suppone etiam x infinitè parvam, ut sit $p = Bx^{n+r}$ accuratè, atque ex terminis maximis ejusdem ordinis tanquàm nihilo æqualibus radix extracta erit Bx^{n+r}, qui terminus secundus proinde datur. Sit

$$q = Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r} + \&c,$$

undè erit $p = Bx^{n+r} + q$: hunc valorem ipsius p substitue in æquatione relationem inter x, p exprimente; et habebis æquationem tertiam quæ ostendit quam inter se x, q obtinent relationem. Ex hac æquatione invenies tertium terminum Cx^{n+2r} eodem plane modo quo terminos duos primos ex æquationibus duabus prioribus obtinuisti. Et opus continuando invenire licet terminos seriei sequentes tot quot volueris.

Et si esset series hujusmodi

$$y = Ax^n + Bx^{n-r} + Cx^{n-2r} + Dx^{n-3r} + \&c.$$

eo citius convergens quo major est x; inter operandum supponenda est x infinite magna: atque terminis ordinum inferiorum rejectis è maximis ejusdem ordinis educenda est radix; nam illa est Ax^n. Ponendo

$$p = Bx^{n-r} + Cx^{n-2r} + Dx^{n-3r} + \&c.$$

adeoque $y = p + Ax^n$, habebitur æquatio nova, ex quâ invenire licet terminum seriei secundum, et opus continuando tot quot est animus.

Et

Et eadem ratione quâ inveniuntur series eo citius convergentes quo major, vel quo minor est x, invenire licet series eo citius convergentes quo propius accedit x ad datam quamvis quantitatem; v. g. si quæratur series eo citius convergens quo propius accedit x ad quantitatem a; nec suppono x infinitè magnam nec infinitè parvam, sed æqualem ipsi a, et tum quæro valorem ipsius y, nam ille valor est primus terminus seriei. Et quomodo ad libitum procedendum est, ex hactenus traditis satis patet.

Hæc de naturâ serierum et fundamento methodi ad eas perveniendi dicta sufficiant. Processus certè legitimus cuivis in diversis infinitorum ordinibus quam minimè etiam versato necessario patet. Ex ipsâ operatione facilè videre est, has series non dare radices æquationum quæsitas, ni sat celeriter convergant; etenim totus operandi processus in eo fundatur, ut sit x satis parva, vel satis magna, hoc est, ut termini seriei subsequentes sint antecedentibus perpetuò minores. Hinc hallucinantur ii qui se aliquid Geometricè etiam accuratum ex seriebus parum convergentibus vel aliquando quidem divergentibus collegisse somniant. Eodemque modo demonstratur divisio et radicum extractio arithmetica. Omnes enim hujusmodi operationes, tam Arithmeticæ quam

D

Speciosæ eodem innituntur fundamento; scilicet ut seriei termini initiales ad quæsitum quam proximè accedant, reliqui vero ut eo magis continuè sint minores quo magis à primo distant. Qui series divergentes adhibent in problematum solutione, idem faciunt ac si divisionem arithmeticam versus dextram, non versus sinistram inchoarent. Istius modi enim series quæsitum nunquam dant, sed merè sunt imaginariæ.

Hisce jam expositis, serierum inventio eo usque reducitur, ut inveniantur termini maximi alicujus æquationis ejusdem ordinis; posito quod una indeterminatarum, quas involvit æquatio, evadit infinitè magna vel infinitè parva. Quod tamen perficere nemo unquam valuit præter D. *Newtonum* serierum inventorem. Duplici utitur ille methodo, una, Parallelogrammi scilicet, quam descripsit in epistolâ ad D. *Oldenburgium* 24 octob. anno 1676 missâ; quæ quamvis à plurimis qui eam haud intellexerunt, ut methodus mechanica diù neglecta jacuit, est omnium quam quis excogitare potest generalissima et elegantissima. Alteram methodum descripsit D. *Newtonus* in epistolâ ad D. *Wallisium* anno 1692 missâ: quæ, quamvis Geometræ præ priore huc usque amplexi sunt, est particularis so-

lummodo, ut-pote cujus ope tantùm invenire licet series eò citius convergentes quò minor est *x* et hoc non adeò generaliter. *Hæc methodus*, ait NEWTONUS, *ejusdem est generis cum eâ pro extrahendo radices ex æquationibus affectis superiùs descriptâ.* Hanc igitur methodum, uti credere par est, *Newtonus* à Parallelogrammo deduxit; utcunque verò se res habet, eam eique similem, pro inveniendis æquationum radicibus in seriebus eo celerius convergentibus quo major est *x*, in sequentibus à Parallelogrammo demonstrabimus (*).

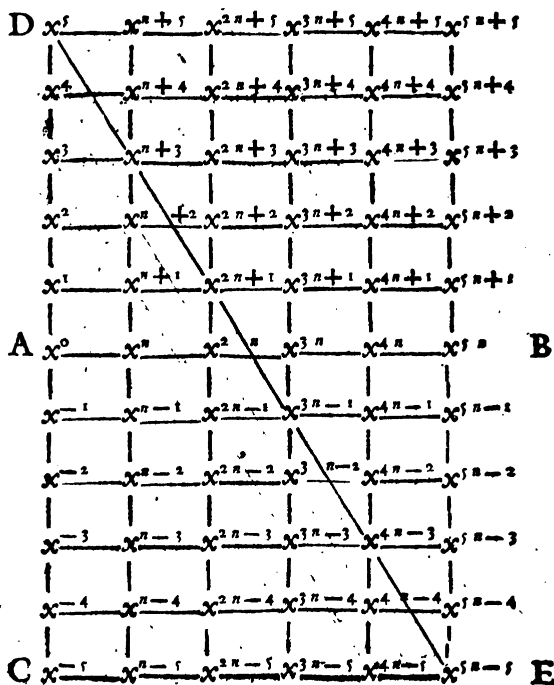
(*) Geometra Gallicus De Gua triangulum parallelogrammo Newtoniano suffecit. Quantumvis ingeniosus sit hujùs trianguli usus in maximis æquationum terminis inveniendis, fatendum tamen est hunc prorsùs mechanicum videri. Quapropter vir Celeberr. *Lagrange* methodum simplicem atque elegantissimam et ex analyticis considerationibus duntaxat deductam excogitavit. Quam accuratissimè explanatam reperias, ac simul quicquid ad evolutionem functionum in seriebus attinet, in Tractatu de Calculo differentiali et Integrali quem nuperrimè apud eundem Bibliopolam edidit *S. F. Lacroix*.

Non adeò mirum ac sentit *Stirling*, serierum methodum fuisse neglectam; nam si illam veluti approximatoriam spectaveris, non sine maximâ cautione adhibenda est; atque ubi fluxionalibus vel differentialibus æquationibus applicatur, non semper suppeditat solutionem tàm generalem quàm postulat quæstionis status. Indè meritò insectatur *Johannes Bernoulli* Geometras anglos, quòd præter necessitatem seriebus utantur. *Edit. Not.*

PROP. II. PROBLEMA.

Si una variabilium quas involvit æquatio evadat infinitè magna vel parva, opporteat invenire terminos illius æquationis maximos ejusdem ordinis.

Duc rectam D A C eique ad rectos angulos A B: hasce rectas divide in lineolas innumeras æquales, à quarum rectularum extremitatibus erige normales distribuentes spatia angularia D A B, C A B in rectangula innumera æqualia.



Sit x indeterminata ex cujus potestatibus conficienda est series, n index ipsius x in primo termino seriei, adeò ut sit radix quæsita y æqualis $A\ x^n$ accurate, cùm x est infinitè magna vel infinitè parva, prout seriei quæsitæ natura requirit.

Concipe rectæ C D partes singulas datas esse et unitati æquales; rectæ verò A B partes singulas variabiles et quantitati n semper æquales. In punctis angularibus æqualium rectangulorum substitue dignitates quantitatum x, x^n regulariter ascendentium et descendentium à puncto A, uti in schemate videre est.

Index cujusvis potestatis ipsius x in rectâ C D positæ æqualis est ejus distantiæ à puncto A; affirmativi sunt indices suprà punctum A, negativi verò qui infrà locantur. Eodemque modo, quum pars quælibet rectæ A B æqualis sit n, index dignitatis cujusvis ipsius x in rectâ A B positæ dat ejus distantiam à puncto A. Adeòque in punctis angularibus extrà rectas A B et C D positis, una pars indicis dat distantiam à rectâ A B, altera pars distantiam à rectâ C D. Et indè totus index simul sumptus æqualis est summæ aut differentiæ talium distantiarum, prout jacet suprà vel infrà rectam A B.

Duc jam rectam quamvis D E transeuntem

D 3

per puncta duo quævis angularia x^5, x^{4n-3}. Et indices terminorum omnium, quos attingit recta illa D E, erunt æquidistantes in progressione arithmeticâ: supponamus hosce indices sibi invicem æquari, hoc est, eorum differentiam esse nihil, et indices omnes alii majores, minores vel æquales erunt horum indicum alterutri, prout jacent suprà, infrà vel in ipsâ rectâ D E. Hæc patent ex summis vel differentiis rectarum quibus diximus omnes indices æquari respectivè. Igitur si x sit quantitas infinitè magna, termini quos attingit recta D E, erunt ejusdem ordinis, reliqui verò infinitè majores vel minores terminis attactis prout jacent suprà vel infrà rectam D E. Et si x sit quantitas infinitè parva, termini quos attingit D E erunt ejusdem ordinis, reliqui verò erunt terminis attactis infinitè majores vel minores prout jacent infrà vel suprà rectam D E. Atque hinc tandem oritur solutio problematis; scilicet quum æquatio aliqua proponitur, pone $y = x^n$, $y = x^{n+1}$, $y = x^{n+2}$, $y = x^{n+3}$, &c. neglectis coefficientibus. Terminos æquationis resultantes eodem modo dispone, quo in schemate, cuique locum proprium adscribendo pro ratione indicis: ad horum terminorum sic dispositorum duos vel plures applicetur regula, ita ut omnes reliqui cadant suprà vel infrà regulam,

prout quæris seriem ex ascendentibus vel descendentibus ipsius x dignitatibus confectam. Et termini quos attingit regula erunt maximi ejusdem ordinis. Q. E. I.

Si quando forte accidit, quod indices ipsius x sint fracti, vel etiam si vis surdi, et nimis operosum foret eos tollere; subdividendæ sunt partes lineæ C D, et inde erigendo normales, in earum cum reliquis concursu disponendæ sunt potestates quarum indices fracti sunt vel surdi. Hujus eadem ac propositionis est demonstratio.

Coroll. 1. Supponamus terminos omnes infrà rectam D E abesse. Et, (per hanc propositionem) termini x^5, x^{n+3}, x^{2n+1}, x^{3n-1}, x^{4n-3} et x^{5n-5} quos attingit regula, erunt maximi ejusdem ordinis; modò supponatur x infinitè parva; et indè eorum indices necessariò æquantur; hoc est, $n+3=5$, $2n+1=5$, $3n-1=5$, $4n-3=5$, et $5n-5=5$. Harum quinque æquationum quælibet dabit $n=2$. Æquetur jam numerus 5 indici termini cujusvis aliàs suprà rectam D E positi; sit exempli gratiâ $2n+3=5$, erit $n=1$; sit $4n=5$, erit $n=\frac{5}{4}$; sit $5n+5=5$, erit $n=0$, sit $3n+4=5$, erit $n=\frac{1}{3}$. Vides igitur quod æquando omnes indices numero 5 (qui hìc ponitur index infimæ dignitatis ipsius x), valor ipsius n verus, est

omnium valorum sic prodeuntium maximus; reliqui tamen vero valore semper prodeunt minores.

Coroll. 2. Cum itaque æquatio aliqua proponitur, et quæritur ejus radix in serie eò citiùs convergente quò minor est x, sit λ index infimæ potestatis ipsius x quæ nec per y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, &c. aut earum dignitates aliquas multiplicatur; hoc est, sit λ index infimæ dignitatis ipsius x in rectâ C D positæ; pone $y = x^n$; $\dot{y} = x^{n-1}$, $\ddot{y} = x^{n-2}$, &c. Et, hisce valoribus in æquatione substitutis, æquentur omnes indices terminorum sic resultantium indici λ, et valor ipsius n omnium maximus indè proveniens, erit index ipsius x in primo termini seriei quæsitæ. Estque hæc altera D. *Newtoni* methodus pro inveniendo indice termini primi.

Coroll. 3. Supponamus jam terminos omnes infrà rectam D E jacere, et reliquos abesse, ς qui nunc est index altissimæ dignitatis earum quæ nec per y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, &c. aut earum potestates aliquas multiplicantur, æquatus indici cujusvis termini in rectâ D E positi semper dabit $n = 2$, ut anteà in Corollario primo. Æquetur autem ς indici dignitatis alicujus ipsius x infrà rectam D E jacentis; sit verbi

gratiâ, $n + 1 = 5$, erit $n = 4$; sit $2n - 3 = 5$, erit $n = 4$; sit $n - 3 = 5$, et erit $n = 8$. Constat ergo quod 2 verus ipsius n valor, est omnium sic provenientium semper minimus. Undè duco regulam sequentem.

Coroll. 4. Si quæritur series eò citiùs convergens quò major est x, sit $y = x^n$, $\dot{y} = x^{n-1}$, $\ddot{y} = x^{n-2}$, &c. hosce valores in æquatione substitue, et terminorum omnium resultantium indices æquentur ipsi λ (indici altissimæ dignitatis ipsius x, quæ nec per $y, \dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$, &c. aut earum dignitates aliquas multiplicatur) atque valor ipsius n omnium minimus hoc modo inventus, est index ipsius x in primo seriei termino.

Methodus hæc pro inveniendo indice primi termini seriei ex descendentibus ipsius x dignitatibus confectæ, similis est methodo *D. Newtoni* in Corollario secundo expositæ, pro inveniendo indice termini primi in serie ubi potestates ipsius x perpetuò sunt ascendentes; earum verò neutra haud adeò generalis est, uti ex Parallelogrammo facilè cuivis videre est.

Coroll. 5. Terminos quos attingit recta D E appello *primi ordinis terminos*. Moveatur recta

illa DE motu parallelo, et simul tanget terminos x^4, x^{n+2}, x^{2n}, x^{3n-2}, x^{4n-4}; hi sunt *termini secundi ordinis*; x^3, x^{n+1}, x^{2n-1}, x^{3n-3}, x^{4n-5} sunt *tertii ordinis termini*; x^2, x^n, x^{2n-2}, x^{3n-4} sunt *quarti ordinis* et sic in infinitum. Terminos enim *ejusdem ordinis* recta DE motu parallelo lata simul tanget. Et sicut radix extracta ex terminis primi ordinis, dat terminum seriei primum, sic radix extracta ex terminis primi et secundi ordinis, dat terminos duos primos; radix extracta ex terminis primi, secundi et tertii ordinis dat terminos tres primos; et sic in infinitum. Undè si in æquatione desint termini ordinum aliquorum intermediorum, termini seriei respectivi habebuntur extrahendo radicem ex terminis æquationis ordinum superiorum. Desint, verbi gratiâ, termini tertii, quarti, quinti et sexti ordinis, et radix extracta ex terminis primi et secundi ordinis, dabit primos sex seriei terminos. Hæc observatio operationi aliquandò compendium subministret: exemplis verò in sequentibus illustrabitur.

Coroll. 6. Ex hâc propositione invenire licet numerum radicum, quas æquatio fluxiones involvens habere potest, et quibus plures habere nequit. Nam termini maximi ejusdem ordinis dant valorem ipsius y, cùm x est infinitè ma-

magna vel infinitè parva. Et (per Coroll. 5. Prop. 1.) numerus valorum ipsius y in omni Abscissæ x magnitudine idem semper est. Ergo æquationis, quæ dat y, cum x est infinitè parva vel infinitè magna, numerus radicum, æqualis est numero radicum quas æquatio proposita habere potest, et quibus plures habere nequit.

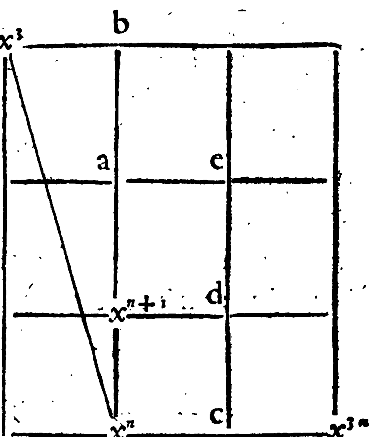
Adeoque etiam innotescit numerus radicum æquationis hujusmodi $y^x + a\,x^y = a$, ubi indeterminatarum indeterminati sunt coefficientes; nam ejusmodi æquatio transmutari potest in fluxionalem.

Aliquandò accidit, quod ad inveniendum primum terminum seriei, prodeunt duæ æquationes diversarum dimensionum: in illis casibus dimensio maxima semper dat numerum radicum æquationis propositæ.

Exemplum primum.

Æquationis $y^3 - a^2 y + a x y - x^3 = 0$ extrahendæ sint radices. Ut inveniatur index termini primi seriei quæsitæ, pone $y = x^n$, eritque $y^3 = x^{3n}$, $x y = x^{n+1}$. Terminis hisce dicto modo dispositis in punctis angularibus Parallelogrammi, video exteriorum tres casus accidere: scilicet, sunt x^3, x^n; x^n, x^{3n}, vel x^3, x^{3n}; termini reliquis exteriores. Æquentur

indices, et erit $1.^{mo}$ $n = 3$, $2.^{o}$ $n = 0$ et $3.^{o}$ $n = 1$; igitur si quæritur series ex dignitatibus ascendentibus confecta, potest esse 3 vel 0 index ipsius x in primo termino seriei. Moveatur recta $x^n\, x^3$ motu parallelo, et ea primò perveniet ad x^{n+1} terminum unicum secundi ordinis, secundò perveniet ad angulum a, tertiò ad b, c simul, quartò ad d, quintò ad e et ultimò ad x^{3n} terminum ordinis infimi. Cum igitur desint termini ordinis tertii, quarti, quinti et sexti, invenientur primi sex seriei termini (per Coroll. 5. prop. 2) extrahendo radicem ex terminis $-a^2y+axy-x^3$ primi et secundi ordinis positis nihilo æqualibus. Hoc verò per divisionem fit; nam si sit æquatio



$$-a^2y+axy-x^3=0 \text{ erit } y=\frac{x^3}{-a^2+ax},$$

adeoque dividendo est

$$y=\frac{-x^3}{a^2}-\frac{x^4}{a^3}-\frac{x^5}{a^4}-\frac{x^6}{a^5}-\frac{x^7}{a^6}-\frac{x^8}{a^7}-\&c.$$

Hi sunt primi sex termini per divisionem

inventi : terminus septimus invenietur esse $\frac{-2x^9}{a^8}$. Hìc divisionem inchoavi à termino a^2 quoniam ponitur x admodùm parva.

In casu secundo erat $n=0$, pro y itaque in æquatione substitue Ax^0, vel quod idem est, A, ubi A est quantitas determinanda statim invenienda. Et orietur

$$A^3 - a^2 A + a x A - x^3 = 0.$$

Evanescat jam x et erit $A^3 - a^2 A = 0$, undè est $A = 0$, vel $A = \pm a$: igitur terminus primus potest esse $+a$ vel $-a$: valor o spectat ad radicem jam inventam. Pone p æqualem terminis nondùm inventis et erit $y = a + p$ quem ipsius y valorem in æquatione substituendo orietur æquatio

$$p^3 + 3ap^2 + (2a^2 + ax)p + a^2 x - x^3 = 0$$

indeterminatas x, p, involvens. Ad inveniendum terminum primum valoris radicis p, ope rectanguli habebimus æquationes

$$p^3 + 3ap^2 + 2a^2 p = 0,\ 2a^2 p + a^2 x = 0,$$

æquationis illius radices $0, -a, -2a$, ad seriem quæsitam non pertinent (ut posteà explicabitur). Hujus verò radix $-\frac{1}{2}x$ est terminus seriei secundus. Pone igitur $p = q - \frac{1}{2}x$, et orietur $q^3 + (3a - \frac{3}{2}x)q^2 + (2a^2 - 2ax + \frac{3}{4}x^2)q$

$$+ \frac{1}{4}ax^2 - \frac{9}{8}x^3 = 0,$$

ubi æquatio $2a^2 q + \frac{1}{4} a x^2 = 0$, dat $q = -\frac{x^2}{8a}$ proximè; vel $q = r - \frac{x^2}{8a}$.

Hunc valorem pro q substituo, neglectis terminis q^3, $-\frac{3}{2} x q^2$, ut et iis in quibus r erit plusquàm unius dimensionis, quos nulli usui futuros satis indicabit ipsa operatio, modò unum vel duos fortè seriei terminos plures quærere tantùm est animus; et exurget

$$2a^2 r - 2axr = \frac{7}{8}x^3 - \frac{3x^4}{64a}$$ proximè, atque dividendo erit $r = \frac{7x^3}{16a^2} + \frac{59x^4}{128a^3}$ &c.

Ergo

$$y = a + p = a - \frac{1}{2}x + q = a - \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8a} + r$$
$$= a - \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8a} + \frac{7x^3}{16a^2} + \frac{59x^4}{128a^3}$$ &c. Et si pro primo termino usurpassem $-a$, prodisset

$$y = -a + \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{8a} + \frac{9x^3}{16a^2} + \frac{69x^4}{128a^3}$$ &c.

Hìc notandum est quòd primi tres termini prodeunt rejiciendo x^3, et ex terminis reliquis $y^3 - a^2 y + axy = 0$, id est, ex $y^2 - a^2 + ax = 0$ extrahendo radicem.

Radix unica in serie eò citiùs convergente quò major est x.

In tertio casu erat n unitas, pone ergo $y = Ax$, et orietur

$$A^3x^3 - a^2Ax + aAx^2 - x^3 = 0,$$

termini maximi $A^3x^3 - x^3$ ejusdem ordinis positi æquales nihilo dant $A = 1$; ergo est x, primus terminus seriei. Pone $y = x + p$, et resultabit

$$p^3 + 3xp^2 + (3x^2 + ax - a^2)p + ax^2 - a^2x = 0,$$

ubi termini $3x^2p$, ax^2 positi æquales nihilo dant $p = \frac{1}{3}a$ ferè, vel $p = q - \frac{1}{3}a$: Hunc ipsius p valorem substituendo, resultabit æquatio

$$q^3 + (3x - a)q^2 + (3x^2 - ax - \tfrac{1}{3}a^2)q - a^2x + a^3 = 0,$$

ubi termini $3qx^2$, $-a^2x$ dant $\frac{a^2}{3x}$ pro termino tertio. Pone $q = r + \frac{a^2}{3x}$, et illum valorem substituendo, neglectis terminis nulli usui futuris, habebis

$$(3x^2 - ax)r = \frac{1}{27}a^3 - \frac{a^4}{9x} \text{ ferè},$$ undè

$$r = \frac{a^3}{81x^2} - \frac{8a^4}{243x^3} \text{ \&c.}$$ adeòque est

$$y = x - \frac{1}{3}a + \frac{a^2}{3x} + \frac{a^3}{81x^2} - \frac{8a^4}{243x^3} \text{ \&c.}$$

Exemplum secundum.

In hoc exemplo indices reperiuntur ope *Cor.* 4. *prop.* 2.

Ex æquatione $x^3\dot{y}+ay\dot{x}x+a^2\dot{x}x-2a^3\dot{x}=0$ extrahenda sit radix y in serie ubi indices ipsius x perpetuò magis descendunt. Fluat x uniformiter, et sit $\dot{x}=1$, atque æquatio evadet $x^3\dot{y}+axy+a^2x-2a^3=0$. Pone $y=Ax^n$ erit $\dot{y}=nAx^{n-1}$, atque proveniet æquatio $nAx^{n+2}+aAx^{n+1}+a^2x-2a^3=0$. Terminus jam altissimæ dignitatis in quo nec $\dot{y}$ nec y reperitur est a^2x, ubi index ipsius x est unitas : æquentur igitur indices terminorum reliquorum unitati, eritque 1.° $n+2=1$, undè $n=-1$; 2.° erit $n+1=1$, undè $n=0$, quorum valorum minimus -1, est index ipsius x in primo termino seriei, et termini nAx^{n+2}, a^2x vel $-Ax$, $+a^2x$ positi æquales nihilo dant $A=a^2$, undè est $\frac{a^2}{x}$ primus terminus seriei.

Operatio

Operatio secunda.

Pro terminis reliquis pone p, et erit $y = p + a^2 x^{-1}$, $\dot{y} = \dot{p} - a^2 x^{-2}$, undè orietur $x^3 \dot{p} + a x p - a^3 = 0$: ubi p, $\dot{p}$, vices subeunt ipsarum y, $\dot{y}$ in æquatione primâ. Sit $p = A x^n$, $\dot{p} = n A x^{n-1}$; et prodibit

$$n A x^{n+2} + a A x^{n+1} - a^3 = 0;$$

terminus unicus in quo nec p neque $\dot{p}$ reperitur est a^3, ubi index ipsius x est 0; sit igitur $n + 2 = 0$, et erit $n = -2$; sit $n + 1 = 0$, et erit $n = -1$; quorum numerorum minimus -2 est index ipsius x in secundo termino: et termini $n A x^{n+2}$, $-a^3$ positi æquales nihilo, dant $A = \frac{1}{n} a^3 x^{-2-n} = -\frac{1}{2} a^3$; ergo terminus secundus est $-\frac{a^3}{2x^2}$.

Operatio tertia.

Pone $p = q - \frac{1}{2} a^3 x^{-2}$, erit $\dot{p} = \dot{q} + a^3 x^{-3}$, quos valores substituendo, orietur æquatio $x^3 \dot{q} + a x q - \frac{1}{2} a^4 x^{-1} = 0$. Pone $q = A x^n$, $\dot{q} = n A x^{n-1}$, et exurget

$$n A x^{n+2} + a A x^{n+1} - \tfrac{1}{2} a^4 x^{-1} = 0.$$

Terminus unicus in quo nec q neque $\dot{q}$ repe-

ritur, est $-\frac{1}{2}a^4 x^{-1}$, ubi index ipsius x est -1; jam ponendo $n+2=-1$, erit $n=-3$, et ponendo $n+1=-1$, erit $n=-2$, quorum minimus -3 est index quem quærimus, et termini nAx^{n+2}, $\frac{1}{2}a^4 x^{-1}$, (quorum indices inter se æquati dant verum ipsius n valorem) positi æquales nihilo dant $A=-\frac{1}{6}a^4$ et indè terminus tertius est $-\frac{a^4}{6x^3}$.

Operatio quarta.

Sit $q=r-\frac{1}{6}a^4 x^{-3}$, $\dot{q}=\dot{r}+\frac{1}{2}a^4 x^{-4}$, et evadet æquatio $x^3 \dot{r}+axr-\frac{1}{6}a^5 x^{-2}=0$, ex quâ æquatione invenies terminum quartum esse $-\frac{a^5}{24x^4}$, est igitur

$$y=\frac{a^2}{x}-\frac{a^3}{2x^2}-\frac{a^4}{6x^3}-\frac{a^5}{24x^4}-\&c.$$

Hoc est,

$$y=\frac{a^2}{1.x}-\frac{a^3}{1.2.x^2}-\frac{a^4}{1.2.3.x^3}-\frac{a^5}{1.2.3.4.x^4}-\frac{a^6}{1.2.3.4.5.x^5}$$

Methodus hæc sigillatim inveniendi terminos est admodùm generalis, at plerumque nimis operosa. Est autem alia methodus hasce radices extrahendi, quæ consistit in assumptione seriei universalis hujusmodi

$$y=Ax^n+Bx^{n+r}+Cx^{n+2r}+Dx^{n+3r}+\&c.$$

Et indè determinando exponentes n, r, et coefficientes A, B, C, D, &c. Hujus methodi, longo tempore postquam *D. Newtono* innotuit, in *Actis* Eruditorum *Lipsiæ D. Leibnitius*, suo etiam nomine edidit exemplum unum aut alterum in casibus facilioribus, ubi tantum docuit coefficientium inventionem; at in indicum non in coefficientium inventione jacebat difficultas. Ideoque *D. Taylor* in *Prop.* 9. *Methodi incrementorum*, priusquam coefficientes determinat, formam seriei invenire aggreditur. Estque ut sequitur.

Inveniatur (per *Prop.* 2. vel ejus *Coroll.*) index termini primi, vocetur is n, in æquatione pro $y, \dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$, &c. scribe x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}, &c. respectivè, adeò ut termini resultantes componantur omnes ex x et datis quantitatibus: sit r maximus communis divisor indicum terminorum sic resultantium, et forma seriei erit hæc

$$y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r} + \&c.$$

Erit verò r negativa aut affirmativa, prout quæris seriem ex dignitatibus ipsius x descendentibus aut ascendentibus confectam.

Exemplum tertium.

Æquationis $y^3 + axy - x^3 = 0$, quæratur radix cùm x est admodùm magna. Invenio (per *Prop.* 2.) unitatem esse indicem ipsius x in primo termino seriei : pone igitur $y = x$, et æquatio evadet $x^3 + ax^2 - x^3 = 0$. Horum indicum 2, 3, 3 maximus communis divisor est unitas, ergo seriei forma erit
$y = Ax + B + Cx^{-1} + Dx^{-2} + Ex^{-3} + \&c.$
sequitur operatio.

$$
\begin{array}{r|l}
y^3 = & A^3x^3 + 3A^2Bx^2 \left.\begin{array}{l} +3A^2C \\ +3AB^2 \end{array}\right\} x \left.\begin{array}{l} +3A^2D \\ +6ABC \\ +B^3 \end{array}\right\} x^0 \\
& \left.\begin{array}{l} +3A^2E \\ +6ABD \\ +3AC^2 \\ +3B^2C \end{array}\right\} x^{-1} + \&c. \\
-x^2 = & -x^3 \\
+axy = & \;* \quad + aAx^2 \quad + aBx \quad + aCx^0 \\
& + aDx^{-1} + \&c.
\end{array}
$$

Comparando coefficientes terminorum homologorum, erit $A^3 = 1$, undè $A = 1$.
$3A^2B + aA = 0$, undè $B = -\frac{1}{3}a$.
$3A^3C + 3AB^2 + aB = 0$, undè $C = 0$.
$3A^2D + B^3 = 0$, undè $D = \frac{1}{81}a^3$.
$3A^2E + 6ABD + aD = 0$, undè $E = \frac{1}{243}a^4$ &c.

Ergo $y = x - \frac{1}{3}a + \dfrac{a^3}{81x^2} + \dfrac{a^4}{243x^3} + \&c.$

Exemplum quartum.

Ex æquatione

$$\dot{x}^2 y^2 - 3\,x^2 \dot{x} \dot{y} + 2\,\dot{x}\,x^2 - a\,x\,\dot{y}^2 + a^2\,\dot{x}^2 = 0,$$

extrahenda sit radix y in serie eò citiùs convergente quò major est x. Invenio formam seriei fore,

$$y = A x + B + C x^{-1} + D x^{-2} + E x^{-3} + \&c.$$

Fluat x uniformiter, existente $\dot{x} = 1$, ut in casibus hujusmodi vulgò fit; et evadet æquatio $\dot{y}^2 - 3\,x^2\,\dot{y} + 2\,x^2 - a\,x\,\dot{y}^2 + a^2 = 0$. Sequitur operatio.

$$\begin{array}{r|l}
\dot{y}^2 = & A^2 x^2 + 2\,A B x \left.\begin{matrix} +\,2\,A C \\ +\,B^2 \end{matrix}\right\} x^0 \left.\begin{matrix} +\,2\,A D \\ +\,2\,B C \end{matrix}\right\} x^{-1} \\
 & \left.\begin{matrix} +\,2\,A E \\ +\,2\,B D \\ +\,C\,C \end{matrix}\right\} x^{-2} + \&c. \\
-3x^2\dot{y} = & -\,3\,A\,x^2 \quad * \quad +\,3\,C\,x^0 \quad +\,6\,D\,x^{-1} \\
 & +\,9\,E\,x^{-2} + \&c. \\
+2\,x^2 = & +\,2\,x^2 \\
-ax\dot{y}^2 = & \quad * \quad -\,a\,A^2\,x \quad * \quad -\,2\,a\,A\,C\,x^{-1} \\
 & -\,4\,a\,A\,D\,x^{-2} - \&c. \\
+\,a^2 = & \quad * \quad\quad * \quad +\,a^2\,x^0
\end{array}$$

Ex comparatione coefficientium invenio.

$A = 1,\ B = \frac{1}{2}a,\ C = -\frac{1}{4}a^2,\ D = -\frac{1}{32}a^3,\ E = -\frac{5}{352}a^4,$ &c.

$A = 2,\ B = a,\ C = -\frac{2}{7}a^2,\ D = -\frac{2}{35}a^3,\ E = -\frac{104}{3185}a^4,$ &c.

$$\text{Ergo } y = \begin{cases} x + \tfrac{1}{2}a - \dfrac{a^2}{4x} - \dfrac{a^3}{32x^2} - \dfrac{5a^4}{352x^3} \text{ \&c.} \\ 2x + a - \dfrac{2a^2}{7x} - \dfrac{2a^3}{35x^2} - \dfrac{104a^4}{3185x^3} \text{ \&c.} \end{cases}$$

Radices ejusdem æquationis cùm x *est valdè parva.*

Invenietur forma seriei hæc,

$$y = Ax^{\frac{1}{2}} + Bx^1 + Cx^{\frac{3}{2}} + Dx^2 + Ex^{\frac{5}{2}} + \text{\&c.}$$

Sequitur operatio.

$$+aa = \;|\; +aa$$

$$-ax\dot{y}^2 = \;|\; -\tfrac{1}{4}aA^2 - aABx^{\frac{1}{2}} \left.\begin{matrix} -\tfrac{3}{2}aAC \\ -aBB \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} -2aAD \\ -2aBC \end{matrix}\right\} x^{\frac{3}{2}}$$

$$\left.\begin{matrix} -\tfrac{5}{2}aAE \\ -4aBD \\ -\tfrac{9}{4}aCC \end{matrix}\right\} x^2 - \text{\&c.}$$

$$+y\dot{y} = \;|\; * \quad * \quad A^2x + 2ABx^{\frac{3}{2}}$$

$$\left.\begin{matrix} +2AC \\ +BB \end{matrix}\right\} x^2 + \text{\&c.}$$

$$-3x^2\dot{y} = \;|\; * \quad * \quad * \quad -\tfrac{3}{2}Ax^{\frac{3}{2}}$$

$$-3Bx^2 - \text{\&c.}$$

$$+2x^2 = \;|\; * \quad 2x^2$$

$$\text{Undè} \begin{cases} A = +2\sqrt{a},\; B = 0,\; C = +\dfrac{4\sqrt{a}}{3a}, \\ D = -\dfrac{3}{4a},\; E = +\dfrac{2\sqrt{a}}{3aa}, \text{ \&c.} \\ A = -2\sqrt{a},\; B = 0,\; C = -\dfrac{4\sqrt{a}}{3a}, \\ D = -\dfrac{3}{4a},\; E = -\dfrac{2\sqrt{a}}{3aa}, \text{ \&c.} \end{cases}$$

Ergo

$$y = \begin{cases} +2\sqrt{ax} + \dfrac{4x\sqrt{ax}}{3a} - \dfrac{3x^2}{4a} + \dfrac{2x^2\sqrt{ax}}{3aa} \text{ \&c.} \\ -2\sqrt{ax} - \dfrac{4x\sqrt{ax}}{3a} - \dfrac{3x^2}{4a} - \dfrac{2x^2\sqrt{ax}}{3aa} \text{ \&c.} \end{cases}$$

Sed ut verum quod est confiteamur, hæc methodus *D. Taylor* inveniendi formam seriei non est generalis. Imo impossibile est universaliter determinare formam seriei ex datâ formâ æquationis; pendet enim forma seriei tam ex coefficientibus quam ex exponentibus indeterminatarum in æquatione. Sint enim duæ æquationes

$$y^3 - 3ay^2 + 3a^2y - a^3 + x^2y = 0$$
$$y^3 - ay^2 + a^2y - a^3 + x^2y = 0$$

eædem omninò quoad formam, in priore est $y = a - a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} + \dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{3a^{\frac{1}{3}}}$ &c. in posteriore est $y = a + \dfrac{x^2}{2a} - \dfrac{x^4}{2a^3}$ &c. Et juxtà regulam *D. Taylor*, utraque series habere debet eandem formam, quam habet posterior. Fallit dicta regula quotiescunque coincidunt duo vel plures valores termini primi seriei : hoc est, quandò ordinata prima tangit curvam vel transit per punctum ejus duplex : vel quandò

ordinata ad distantiam infinitam transit per plura curvæ puncta infinitè propinqua ad se invicem. Inveni autem sequentem regulam pro inveniendâ formâ seriei quantum hactenùs constitit nunquam fallere, sed illam esse ubique veram affirmare non audeo, proptereà quod in eam casu tantùm incidi, (observando scilicet plurimas series diversas et ejus demonstrationem posteà frustrà quæsivi.

Methodus determinandi formam seriei.

Inveniatur index primi termini, vocetur is n, in æquatione pro y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, &c. scribe x^n, x^{n-1}, x^{n-2} &c. respectivè, adeò ut termini resultantes componantur ex x et datis quantitatibus: sit m maximus communis divisor indicum terminorum sic resultantium, p numerus valorum primi termini qui inter se æquantur, et $r = \frac{m}{p}$, atque forma seriei hæc erit

$$y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + \&c.$$

coincidit hæc regula cum regulâ *D. Taylor* quando p est unitas, hoc est, quandò primus terminus non habet plures valores æquales (*).

(*) Regula hæc *in quam casu tantùm incidit* STIRLING, haud generalis est. Fallit v. g. si applicetur ad hoc exemplum: $x^2 y^3 + 3ax^2 y^2 + 3a^2 x^2 y + a^3 x^2 - a^3 xy - a^4 x + a^5 = 0$;

Exemplum quintum.

Ex æquatione $y^3 - 2xy^2 + x^2y - a^3 = 0$, extrahenda sit radix y in serie eo citiùs convergente quo major est x. Invenies ope rectanguli primum terminum esse x, quem scribe pro y et æquatio evadet $x^3 - 2x^3 + x^3 - a^3 = 0$. Indices terminorum sunt 3, 3, 3, 0, quorum maximus communis divisor est 3 et æquatio $y^3 - xy^2 + x^2y = 0$ quæ dat primum terminnm habet duas radices inter se æquales; igitur est $m = 3$, $p = 2$, et $\frac{m}{p} = \frac{3}{2} = r$, undè

---

nam pro exponente primi termini seriei descendentis quâ exprimitur y, invenietur 0. Igitur substituendo Ax^n loco y, atque ponendo $n = 0$, exponentes omnium terminorum sunt numeri sequentes 2, 2, 2, 2, 1, 1, 0, quorum maximus communis divisor est 1 : at coefficiens primi termini datur æquatione $A^3 + 3aA^2 + 3a^2A + a^3 = 0$ et tres valores æquales habet. Secundùm autem regulam prædictam prodiret $r = \frac{m}{p} = \frac{1}{3}$; proposita tamen æquatio præbet has tres series descendentes :

$$y = a + a^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} a^2 x^{-1} - \tfrac{3}{8} a^{\frac{5}{2}} x^{-\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{2} a^3 x^{-2} + \&c.$$

$$y = a - a^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} a^2 x^{-1} + \tfrac{3}{8} a^{\frac{5}{2}} x^{-\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{2} a^3 x^{-2} - \&c.$$

$$y = a + a^2 x^{-1} + a^3 x^{-2} + 3a^4 x^{-3} + 10a^5 x^{-4} + \&c.$$

à lege anteà repertâ prorsùs aberrantes. *Editoris Annotatio.*

forma seriei hæc est

$$y = Ax + Bx^{-\frac{1}{2}} + Cx^{-2} + Dx^{-\frac{7}{2}} + \&c.$$

Estque operatio ut sequitur

$$\begin{array}{r|l}
y^3 = & A^3x^3 + 3A^2B\,x^{\frac{3}{2}} \left.\begin{array}{l} +3A^2C \\ +3AB^2 \end{array}\right\} x^0 \left.\begin{array}{l} +3A^2D \\ +6ABC \\ +B^3 \end{array}\right\} x^{-\frac{3}{2}} \\
 & \left.\begin{array}{l} +3A^2E \\ +6ABD \\ +3AC^2 \\ +3B^2C \end{array}\right\} x^{-3} + \&c. \\
-2xy^2 = & -2A^2x^3 - 4ABx^{\frac{3}{2}} \left.\begin{array}{l} -4AC \\ -2B^2 \end{array}\right\} x^0 \left.\begin{array}{l} -4AD \\ -4BC \end{array}\right\} x^{-\frac{3}{2}} \\
 & \left.\begin{array}{l} -4AE \\ -4BD \\ -2CC \end{array}\right\} x^{-3} - \&c. \\
+x^2y = & Ax^3 + Bx^{\frac{3}{2}} + Cx^0 + Dx^{-\frac{3}{2}} \\
 & + Ex^{-3} + \&c. \\
-a^3 = & \qquad\qquad -a^3x^0
\end{array}$$

Primò igitur habemus æquationem, $A^3 - 2A^2 + A = 0$, undè est $A = +1$, $A = +1$, et $A = 0$. Secundò est $3A^2B - 4AB + B = 0$, vel $3B - 4B + B = 0$, sed indè nihil colligitur. Tertiò est

$$3A^2C + 3AB^2 - 4AC - 2B^2 + C - a^3 = 0,$$

vel $3AB^2 - 2B^2 - a^3 = 0$, undè est $B = \pm a^{\frac{3}{2}}$, quartò est

$$3A^2D + 6ABC + B^3 - 4AD - 4BC + D = 0;$$

id est, $6ABC + B^3 - 4BC = 0$, ergo est $C = -\frac{a^3}{2}$, et quinto invenietur $D = \frac{7}{8}a^{\frac{5}{2}}$ quando pro B scribitur $+a^{\frac{3}{2}}$, sed erit $= -\frac{7}{8}a^{\frac{5}{2}}$, quandò pro B scribitur $-a^{\frac{3}{2}}$. Adeoque est radix

$$y = \begin{cases} x + \dfrac{a^2}{\sqrt{ax}} - \dfrac{a^3}{2x^2} + \dfrac{7a^4}{8x^2\sqrt{ax}} \ \&c. \\ x - \dfrac{a^2}{\sqrt{ax}} - \dfrac{a^3}{2x^2} - \dfrac{7a^4}{8x^2\sqrt{ax}} \ \&c. \end{cases}$$

Hìc in determinatione coefficientium observandum est quod ex secundâ æquatione $3A^2B - 4AB + B = 0$ terminus secundus B non reperiebatur. Idem semper notandum est quotiescumque terminus primus habet plures valores inter se æquales. Nam si termini primi omnes valores sunt inter se diversi, terminus secundus et reliqui omnes in infinitum habebunt nisi unicum valorem et per divisionem semper prodibunt. At si terminus primus habet plures valores inter se æquales, tot diversos valores necessariò habebit terminus secundus; qui itaque per divisionem inveniri nequit, sed radix erit æquationis tot dimensionum quot ipse habet valores. Undè in comparatione coefficientium secundus terminus B ex æqua-

tione secundâ non semper invenitur: sed ponendò coefficientes terminorum homologorum æquales nihilo, membra omnia se mutuò semper destruent usque dùm pervenietur ad terminum in cujus coefficiente reperitur terminus secundus tot dimensionum quot ipse habet valores. Sed hæc omnia experientiâ multò meliùs quàm verbis patebunt.

Considerando curvarum tangentes, curvaturam, variationem curvaturæ, variationem variationis, &c. quæ determinari solent fluxionum ope, determinari etiam posse ope terminorum seriei, ut innuit *D. Newtonus* ad Prop. 10. Lib. 2. *Principiorum*; statim cognovi incrementa prima, secunda, tertia, &c. relationem quandam habere ad seriei terminos respectivos, adeoque terminos illos determinari ex fluxionibus. Ideò quærebam relationem illam et tandem inveni ut sequitur.

PROP. III. THEOR.

Sit

$$y = A + Bx^r + Cx^{2r} + Dx^{3r} + Ex^{4r} + \&c.$$

erit $B = \dfrac{\dot{y}}{1.r\dot{x}}$, $C = \dfrac{\ddot{y}}{1.2.r^2\dot{x}^2}$, $D = \dfrac{\dddot{y}}{1.2.3.r^3\dot{x}^3}$,

$E = \dfrac{\ddddot{y}}{1.2.3.4.r^4\dot{x}^4}$, &c.

adeoque est

$$y = A + \frac{x\dot{y}}{1.r\dot{x}} + \frac{x^2\ddot{y}}{1.2.r^2\dot{x}^2} + \frac{x^3\dddot{y}}{1.2.3.r^3\dot{x}^3} + \&c.$$

Demonstratio.

Fluat x^r uniformiter, et sit ejus fluxio $rx^{r-1}\dot{x} = 1$, vel $\dot{x} = \frac{1}{r}x^{1-r}$. Et erit

$\dot{y} = rBx^{r-1}\dot{x} + 2rCx^{2r-1}\dot{x} + 3rDx^{3r-1}\dot{x} + 4rEx^{4r-1}\dot{x} +$ &c. ubì si pro $\dot{x}$ ponas ejus valorem $\frac{1}{r}x^{1-r}$ erit

$$\dot{y} = B + 2Cx^r + 3Dx^{2r} + 4Ex^{3r} - \&c.$$

Et indè

$$\ddot{y} = 2rCx^{r-1}\dot{x} + 6rDx^{2r-1}\dot{x} + 12rEx^{3r-1}\dot{x} + \&c.$$

vel ponendo pro $\dot{x}$, $\frac{1}{r}x^{1-r}$

$$\ddot{y} = 2C + 6Dx^r + 12Ex^{2r} + \&c.$$

unde $\dddot{y} = 6rDx^{r-1}\dot{x} + 24rEx^{2r-1}\dot{x} + \&c.$

id est, $\dddot{y} = 6D + 24Ex^r +$ &c. adeoque

$\ddddot{y} = 24rEx^{r-1}\dot{x} + \&c. = 24E + \&c.$

Jam sit x infinitè magna vel infinitè parva, prout r est numerus negativus aut affirmativus,

et erit accurate

$$\dot{y} = B,\ \ddot{y} = 2\,C,\ \dddot{y} = 6\,D,\ \ddddot{y} = 24\,E, \text{ \&c.}$$

ergo vicissim est

$$B = \dot{y},\ C = \tfrac{1}{2}\ddot{y},\ D = \tfrac{1}{6}\dddot{y},\ E = \tfrac{1}{24}\ddddot{y}, \text{ \&c.}$$

Hisce valoribus ipsorum B, C, D, E, &c. substitutis, orietur

$$y = A + x^r\dot{y} + \tfrac{1}{2}x^{2r}\ddot{y} + \tfrac{1}{6}x^{3r}\dddot{y} + \tfrac{1}{24}x^{4r}\ddddot{y} + \text{\&c.}$$

Sed erat $\dot{x} = \frac{1}{r}x^{1-r}$, ideòque est $x^r = \frac{x}{r\dot{x}}$ quem ipsius x^r valorem substitue ut termini evadant homogenei, et prodibit

$$y = A + \frac{x\dot{y}}{1.r\dot{x}} + \frac{x^2\ddot{y}}{1.2.r^2\dot{x}^2} + \frac{x^3\dddot{y}}{1.2.3.r^3\dot{x}^3} + \frac{x^4\ddddot{y}}{1.2.3.4.r^4\dot{x}^4} \text{ \&c}$$

Q. E. D.

Coroll. Sit

$$y = Ax^n + Bx^{n+r} + Cx^{n+2r} + Dx^{n+3r} + \text{\&c.}$$

id est

$$y = x^n\,(A + Bx^r + Cx^{2r} + Dx^{3r} + \text{\&c.})$$

pone $y = vx^n$, et erit

$$v = A + Bx^r + Cx^{2r} + Dx^{3r} + \text{\&c.}$$

Undè per hanc propositionem est

$$v = A + \frac{x\dot{v}}{1.r\dot{x}} + \frac{x^2\ddot{v}}{1.2.r^2\dot{x}^2} + \frac{x^3\dddot{v}}{1.2.3.r^3\dot{x}^3} + \text{\&c.}$$

Ergo est

$$y = x^n \left(A + \frac{x \dot{v}}{1 . r \dot{x}} + \frac{x^2 \ddot{v}}{1.2. r^2 \dot{x}^2} + \frac{x^3 \dddot{v}}{1.2.3. r^3 \dot{x}^3} + \&c.\right)$$

Ut habeantur fluxiones ipsius v, pro y in æquatione substitue $v x^n$, et orietur æquatio nova relationem inter x et v definiens, ex quâ invenies fluxiones illas.

Exemplum primum.

Ex æquatione $y^4 - a^3 y = a x^3 - a^3 x$ extrahenda sit radix y. Invenio formam seriei fore $A + B x + C x^2 + D x^3 + \&c.$ adeoque est $r = 1$.

Et ideò fluit x uniformiter, undè per methodum fluxionum directam est

$$4 y^3 \dot{y} - a^3 \dot{y} = 3 a x^2 - a^3,$$

$$4 y^3 \ddot{y} - a^3 \ddot{y} = 6 a x - 12 y^2 \dot{y}^2,$$

$$4 y^3 \dddot{y} - a^3 \dddot{y} = 6 a - 24 y \dot{y}^3 - 36 y^2 \dot{y} \ddot{y}, \&c.$$

undè $\dot{y} = \dfrac{3 a x^2 - a^3}{4 y^3 - a^3}$, ubi pro x scribe o, et pro y, a ejus valorem cum x est o, et erit $\dot{y} = \dfrac{-a^3}{4 a^3 - a^3} = -\dfrac{1}{3}$:

$$\ddot{y} = \frac{6 a x - 12 y^2 \dot{y}^2}{4 y^3 - a^3} = \frac{-12 \times a^2 \times \frac{1}{9}}{3 a^3} = \frac{-4}{9 a};$$

$$\dddot{y} = \frac{6a - 24\dot{y}\,\dot{y}^3 - 36y^2\dot{y}\ddot{y}}{4y^3 - a^3} =$$

$$= \frac{6a + \frac{24}{27}a - \frac{36 \cdot 4a}{27}}{3a^3} = \frac{14}{27a^2}.$$

In serie generali hosce valores substitue; unitatem pro r et a pro A, atque proveniet

$$y = a - \tfrac{1}{3}x - \frac{2x^2}{9a} + \frac{7x^3}{81a^2} \text{ \&c.}$$

Exemplum secundum.

Æquationis $y^3 + a^2y + x^2y - 2a^3 = 0$; quæratur radix y. Invenio formam seriei esse $A + Bx^2 + Cx^4 +$ &c. igitur est $r = 2$, et x^2 fluit uniformiter, id est, $2x\dot{x} = 1$, $\dot{x} = \frac{1}{2x}$.

Capiendo fluxiones erit

$$3y^2\dot{y} + a^2\dot{y} + x^2\dot{y} = -2x\dot{x}y = -y,$$

$$3y^2\ddot{y} + a^2\ddot{y} + x^2\ddot{y} = -2\dot{y} - 6y\dot{y}^2,$$

$$3y^2\dddot{y} + a^2\dddot{y} + x^2\dddot{y} = -3\ddot{y} - 18y\dot{y}\ddot{y} - 6\dot{y}^3.$$

Undè $\dot{y} = \frac{-y}{3y^2 + a^2}$, neglecto termino $x^2\dot{y}$, quoniàm supponitur x evanescere; pro y pone a ejus valorem cum x est 0, et erit

$$\dot{y} = -\frac{1}{4a},$$

$\ddot{y}$.

$$\ddot{y} = \frac{-2\dot{y} - 6y\dot{y}^2}{3y^2 + a^2} = \frac{+\frac{2}{4a} - 6a \times \frac{1}{16a^2}}{4a^2} = \frac{1}{32a^3},$$

$$\dddot{y} = \frac{-3\ddot{y} - 18y\dot{y}\ddot{y} - 6\dot{y}^3}{3y^2 + a^2} =$$

$$= \frac{\frac{-3}{32a^3} - 18a \times -\frac{1}{4a} \times \frac{1}{32a^3} + \frac{6}{64a^3}}{4a^2} = \frac{-9}{256a^5}$$

In serie generali pro A substitue a, et 2 pro r, atque proveniet

$$y = a - \frac{x^2}{4a} + \frac{x^4}{64a^3} - \frac{3x^6}{512a^5} \text{ \&c.}$$

Exemplum tertium.

Elevandum sit binomium $a+x$ ad potestatem indeterminatam cujus index est n. Pone $y = (a+x)^n$; undè cum est $x = 0$ evadit $y = a^n$, et indè in serie generali est $A = a^n$. Forma seriei hæc est $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c. ergo $r = x = 1$. Capiendo fluxiones erit

$$a\dot{y} + x\dot{y} = ny,$$

$$a\ddot{y} + x\ddot{y} = (n-1)\dot{y},$$

$$a\dddot{y} + x\dddot{y} = (n-2)\ddot{y},$$

$$a\ddddot{y} + x\ddddot{y} = (n-3)\dddot{y}, \text{ \&c.}$$

Evanescat x, et erit

$$\dot{y} = n\, a^{n-1},$$

$$\ddot{y} = n\,(n-1)\, a^{n-2},$$

$$\dddot{y} = n\,(n-1)\,(n-2)\, a^{n-3},$$

$$\ddddot{y} = n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\, a^{n-4}, \text{ \&c.}$$

In serie generali hosce valores substitue a^n pro A et unitatem pro r atque prodibit

$$y = (a+x)^n = a^n + n\, a^{n-1} x + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\, a^{n-2} x^2 + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}\,\frac{n-2}{3}\, a^{n-3} x^3 \text{ \&c.}$$

Hoc modo patet quantâ facilitate demonstratur Theorema *D. Newtoni.*

Exemplum quartum.

Ex dato arcu EC (*fig.* 1.) quæratur ejus cosinus BC. Sit $EC = x$, $BC = y$, $Cc = \dot{x}$, $DC = \dot{y}$; erit $AB = \sqrt{(1 - y^2)}$, existente radio $AE = 1$. Propter similia triangula ABC, CDc, $AC : AB :: Cc : CD$, id est, $1 : \sqrt{(1 - y^2)} :: \dot{x} : \dot{y}$, undè erit $\dot{y}^2 = \dot{x}^2 - \dot{x}^2 y^2$. Forma seriei hæc est

$$A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \text{\&c.}$$

quæ continetur in hâc formâ,

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{\&c.}$$

igitur potest x vel x^2 fluere uniformiter quum

quæruntur fluxiones ipsius y. Fluat x uniformiter et sit $\dot{x}=1$, atque æquatio evadet $\dot{y}^2=1-y^2$, undè $2\dot{y}\ddot{y}=-2y\dot{y}$ vel $\ddot{y}=-y$, et indè $\dddot{y}=-\dot{y}$, $\ddddot{y}=-\ddot{y}$, $\overset{.....}{y}=-\dddot{y}$, &c. Quoniam existente arcu $EC=0$, fit $y=AE=1$, pro y substitue unitatem, et erit $\dot{y}=0$, $\ddot{y}=-1$, $\dddot{y}=0$, $\ddddot{y}=1$, $\overset{.....}{y}=0$, &c. In serie generali pro hisce fluxionibus hosce valores substitue, unitatem pro A et unitatem pro r, atque proveniet

$$y=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\&c.$$

Et eodem modo invenire licet sinum AB ex dato ejus arcu EC.

Ex hoc exemplo constat operationem admodùm alleviari supponendo x et non x^2 fluere uniformiter. Idem alibi notandum est, nam r (quæcumque sit forma seriei) ad libitum fere sumi potest. Ut si forma seriei quæsitæ esset

$$Ax^{\frac{3}{2}}+Bx^{\frac{7}{2}}+Dx^{\frac{11}{2}}+Ex^{\frac{15}{2}}+\&c.$$

ubi differentia exponentium est 2, non opus est ut sit $r=2$, sed potest esse quælibet numerorum sequentium 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ &c.

Methodus hæc reducendi radices æquationum in series convergentes, haud absimilis

est methodo assumendi seriem coefficientibus indeterminatis affectam; at plerumque minùs operosa, præsertim si desiderentur seriei termini tantùm pauci initiales : hi sufficiunt ad inveniendas tangentes, radios curvaturæ, Asymptotos et similia.

De Æquationum resolutione in numeris.

Hæc de æquationum reductione litterali dicta sufficiant; de numerali itaque adjicere pauca licet.

Omnis æquationum reductio, uti suprà diximus, ex hoc pendet, ut primò assumatur quantitas radici quæsitæ æqualis proximè, et posteà ut valor ille assumptus corrigatur. Exempli gratiâ, sit æquatio cubica $y^3 - 21y - 16 = 0$, cujus radix quæritur; et tentando, vel per constructionem geometricam invenio esse 5 numerum propè verum, itaque pro y substituo $p + 5$, et provenit æquatio nova $p^3 + 15p^2 + 54p + 4 = 0$; jam quoniam est y proximè æqualis 5, erit p quantitas admodùm parva et per consequens ejus potestates altiores erunt ipso multò minores; neglectis igitur terminis minoribus p^3, $15p^2$ erit ferè $54p + 4 = 0$, vel $p = -\frac{4}{54} = -0,074$, ergò $p + 5 = y = 4,926$ proxime. Si quæritur radix magis accurata, pro p ponendum est $q - 0,074$,

atque operationem perficiendo invenies plures figuras radici jam inventæ adnectendas.

Hæc methodus ea est quam invenit et in Analysi suâ tradidit *D. Newtonus*. Sunt et aliæ methodi idem perficiendi qualis est ea *J. Raphson* et Cl. *Hallei*, sed ex eâ jam traditâ omnes pendent et facilè fluunt.

Hoc modo reducuntur æquationes omnes vulgares, in quibus scilicet existit unica tantùm quantitas ignota: verum etiam æquationes hujusmodi $y^r + 3^r - 7y = 0$ simili modo possunt reduci. Sed in æquationes istius modi, quarum usus nondùm penè innotuit, tempus impendere jam non vacat. Æquationes fluxionales, quoniam in iis semper reperiuntur plures quantitates incognitæ ut pote radix extrahenda cum fluxionibus suis, dicto modo sunt irreducibiles. Ut ergo earum radices in numeris haberi possunt, ad series confugiendum est. Ex seriebus enim, quotiescunque sat celeriter convergunt, expedite inveniuntur radices æquationum. Si quando non convergunt, tantum opus est (monente ipso *Newtono* sub finem *Analyseos*) ut x, scilicet quantitas ex cujus potestatibus conficitur series, aliquoties adhuc minor supponatur; adeoque radix non unica sed pluribus seriebus habenda est. Quomodo vero hoc fit, statim erit manifestum.

Sit Curva *D C* (*fig.* 1.) cujus Abscissa *A B* = x, Ordinata *B C* = y. Et quæratur y vel *B C* in numeris quando Abscissa evadit *A B*. Reducatur Ordinata in seriem, et si series illa sat citò convergat, dabitur *B C*: at si non convergat, eousque minui intelligatur x ut tandem celeriter convergat series; in illâ magnitudine sit x = *A E*, et series dabit in numeris Ordinatam *E F*. Jam sumo novam Abscissam *E B* = z, et quæro relationem inter z et y, ex quâ invenietur valor ipsius y in serie ex potestatibus ipsius z confectâ. Si series illa sat citò convergat, quum est z = *E B*, habemus quæsitum; at si non convergat, eodem modo minui jam intelligatur z quo priùs x, ut convergat series; sit in illo casu z = *E G*, et dabitur ordinata *G H*. Rursùs sit Abscissa tertia *G B* = v, et quæratur relatio inter v et y, quâ inventâ reducatur y in seriem ex dignitatibus ipsius v confectam; quæ si non adhuc celeriter convergit, minuatur v et sit ea = *G K*, quæ *G K* sit tam parva ut series ad libitum convergat, et dabitur Ordinata *K L*. Sumo quartò Abscissam *K B* = u, et quæro relationem inter u et y, ex quâ invenio valorem ordinatæ y in serie, quæ si citò convergat habemus ipsam *B C* quam quærimus. At si non convergit, eodem

modo continuè procedere licet quo priùs: atque ex tali processu Abscissa ultima KB tandem evadet minor datâ quâvis quantitate; ideoque series ultima ad libitum converget.

Hìc notandum est quod est AD primus terminus seriei, quando AE est Abscissa et EF ordinata; EF est primus terminus quando EG est Abscissa et GH ordinata; GH est primus terminus quando GK est Abscissa et KL ordinata; KL est primus terminus seriei quando KB est Abscissa et BC ordinata. Ideoque priusquam haberi potest ordinata quævis subsequens, necessario habendæ sunt omnes antecedentes, et ergo antequam ordinata BC inveniri possit, inveniendæ sunt omnes aliæ. Adjiciendum jam esset exemplum unum aut alterum, sed methodum hanc per se satis patentem ducens, tædium calculi evitare institui.

Subnecterem jam quædam de *præparatione* æquationum, nam aliquæ æquationes præparatione indigent antequam earum radices erui possunt. In æquationibus Lineas rationales designantibus nullam novi difficultatem ex haetenùs dictis facilè non tollendam: non item in æquationibus fluxiones involventibus. Hæ aliquandò præparantur mutando Ordinatam, aliàs Abscissam, aliquandò utramque:

sed sunt æquationes quibus nulla sufficit præparatio, quantùm mihi constare potuit: ego de re dubiâ tractare non suscipio. Certè illi quicumque hanc materiam aggredietur prodibunt calculi quorum onus ægrè sustinendum est.

PROP. IV. THEOR.

Asymptotos recta decussare potest Curvam in totidem punctis, demptis duobus, quot Curva est dimensionum et nunquam pluribus.

Linea quævis secari potest à rectâ in tot punctis quot ipsa est dimensionum et nunquam pluribus, quoniam æquatio tot habere potest radices quot ipsa est dimensionum et non plures. Sit jam v. g. linea tertii ordinis Asymptoton habens BAC. (*fig.* 3.) Duc rectam quamvis $FDLE$ secantem Curvam in tribus punctis D, L, E. In hac rectâ sit quodlibet F, circà quod tanquàm polum gyretur recta DE, per situm $Fdle$ tandem in situm $F\delta\lambda\epsilon$ perveniens; ubi est Asymptoto parallela: et E unum intersectionis punctum abiit in infinitum: ideoque in illâ positione recta $\delta\epsilon$ occurrit Curvæ in duobus tantùm punctis δ, λ. Moveatur recta $\delta\lambda$ motu parallelo donec tandem cum asymptoto $B\,C$ coëat,

et in illo casu punctum δ etiam abibit in infinitum: restat igitur unicum punctum *A* in quo Asymptotos Curvam decussare potest. Et similiter in ullo alio casu ostendetur duo intersectionis puncta abire in infinitum, hoc est, evanescere et nullibi reperiri. Proindè restabit numerus punctorum, in quibus Asymptotos decussare potest Curvam, æqualis numero dimensionum Curvæ dempto binario. Q. E. D.

Coroll. 1. Linea secundi ordinis, id est, sectio coni ejus Asymptoton non omninò decussat; Linea tertii ordinis ejus Asymptoton decussare potest in unico tantùm puncto, Linea quarti ordinis in duobus et nunquam pluribus. Et sic in aliis.

Coroll. 2. Linea secundi vel tertii ordinis Asymptoton non tanget; Linea quarti vel quinti ordinis ejus Asymptoton tangere potest in unico puncto. Et sic porro. Liquet hoc Corollarium exindè quod punctum contactûs conflatur ex pluribus intersectionum punctis in unum coeuntibus.

Coroll. 3. Si linea quarti ordinis tangat ejus Asymptoton, radius Curvaturæ in puncto contactûs semper erit finitus: nam punctum illud contactûs conflabitur ex duobus tantùm intersectionum punctis.

Coroll. 4. Si duo crura Asymptoton aliquam adjacentia, jaceant ad easdem ejus partes, vel ad contrarias et simul ad eandem plagam protensa, tria ad minimum intersectionis puncta abeunt in infinitum.

Coroll. 5. Hinc colligimus maximum numerum Asymptotôn parallelarum quas Linea quævis habere potest, æqualem esse numero ejus dimensionum demptâ unitate.

Coroll. 6. Et si curva habeat tot Asymptotos parallelas, demptâ unitate quot ipsa est dimensionum, ea earum nullam secare potest.

PROP. V. THEOR.

Si ordinata Curvæ parallela sit Tangenti ad punctum infinitè distans, Ordinata illa in æquatione Curvam definiente non ascendet ad tot dimensiones quot est Curva.

Sit $ALHK$ crus Curvæ infinitum (*fig.* 4.) Abscissa $AC = x$, Ordinata $CL = y$, DHK tangens ad H punctum infinitè distans, cui parallela sit ordinata $BL = v$, eique sit correspondens Abscissa $AB = z$. Dico in æquatione ad Curvam quod v non ascendet ad tot dimensiones quot est Curva.

Per H duc ordinatam HE, cui parallela KGF, existente EF quàm minima; sit porro

GH Abscissæ parallela. Concipiatur punctum L abire in infinitum, adeò ut coëant puncta L, H; B, D; C, E; & in illo casu erit $AE = x$, $EH = y$, $GH = \dot{x}$, $GK = \dot{y}$, $AD = z$, $DH = v$. Reducatur y in seriem hujusmodi

$$Ax + Bx^{1-n} + Cx^{1-2n} + Dx^{1-3n} + \&c.$$

eo citiùs convergentem quo major est x. Index ipsius x in primo termino seriei necessariò erit unitas, quoniam ultima tangens DH datam ad Abscissam AB supponitur habere inclinationem. Erit

$$\dot{y} = A\dot{x} + (1-n)Bx^{-n}\dot{x} + (1-2n)Cx^{-2n}\dot{x} + \&c.$$

Undè est

$$\dot{x} : \dot{y} :: 1 : A + (1-n)Bx^{-n} + (1-2n)Cx^{-2n} + \&c.$$

vel ob similia triangula DEH, HGK,

$$1 : A + (1-n)Bx^{-n} + (1-2n)Cx^{-2n} + \&c. :: DE : y;$$

ideoque invenietur $DE = x + \frac{nB}{A}x^{1-n} + \&c.$

ponendo pro y ejus valorem in serie. Et

$$AD = AE - DE = -\frac{nB}{A}x^{1-n} + \&c.$$

Sit jam x infinitè magna, et erit accuratè,

$$y = EH = Ax, \quad AD = -\frac{nB}{A}x^{1-n},$$

quumque per naturam seriei sit n numerus

affirmativus, erit AD infinitè minor EH, et etiam infinitè minor DH quæ ad EH datam habet rationem: hoc est z infinitè minor v, igitur in æquatione v non erit tot dimensionum quot est z, adeoque nec tot quot est Curva. Q. E. D.

Coroll. 1. Igitur æquatio $x = a$ designat rectam, ubi ordinata y nullius est dimensionis, $(x + a)y = bx^2 + cx + d$ omnes secundi ordinis quæ pergunt in infinitum, $(x+a)y^2 = (bx^2+cx+d)y+ex^3+fx^2+gh+h$ omnes tertii ordinis, et sic in reliquis.

Coroll. 2. Si existente Abscissâ Curvæ infinitè magnâ, Ordinata sit adhuc infinitè major, ea parallela erit Tangenti cruris parabolici ad distantiam infinitam.

Coroll. 3. Sin ordinata sit infinitè magna, quum Abscissa non est infinitè magna, ea parallela erit Asymptoto cruris hyperbolici.

Coroll. 4. Constat methodus determinandi positionem Tangentium curvarum ad distantiam infinitam, id est, positionem ordinatarum quæ in æquatione non ascendent ad tot dimensiones quot est curva, scilicet ex ratione quam ad invicem habent x, y in ultimâ earum magnitudine: quæ ratio semper invenitur ope seriorum convergentium.

Scholion.

Poteram hanc propositionem eodem modo demonstrare quo priorem. Nam in æquatione tot semper peribunt Ordinatæ dimensiones, quot intersectionis ejus puncta abeunt in infinitum. Et si quando in aliquâ curvâ ordinata non est tot dimensionum quot est curva, semper concipiendum est puncta quædam intersectionis abire in infinitum: imo hoc in ipsis Ovalibus obtinet; nam concipiendum est eas habere puncta duplicia imaginaria ad distantiam infinitam. Finge enim Curvam habere tot Asymptotos quot habet dimensiones, quarum nullæ duæ sunt inter se parallelæ: atque Ordinatæ illis æquidistantes tot erunt dimensionum quot est Curva, demptâ unitate. Concipe Asymptotos plures motu angulari latas, donec tandem evadant parallelæ, et ordinatæ omnibus illis parallelæ perdent tot dimensiones quot sunt Asymptoti æquidistantes. Quod si fortè æquatio Asymptotos duas vel plures determinans evadat impossibilis, evanescent Asymptoti illæ cum earum cruribus; at Ordinatæ non erunt plurium dimensionum quam anteà erant: atque hinc redditur ratio, quomodo in Ovalibus aliisque curvis, Ordinatarum nulli tangenti ultimæ

parallelarum evanescunt dimensiones: sequitur verò in illis casibus dimensionum evanescentium numerum semper esse parem, quoniam radicum impossibilium numerus est par. Si fortè evenit, quod ordinatæ unicæ Asymptoto parallelæ perdunt plures dimensiones, et nulla interim comparet æquatio, per cujus radicum impossibilitatem Asymptoti reliquæ evanuerunt; tum concipe plures Asymptotos in unam coire. In illis casibus Asymptotos semper habet crura plura solito ad easdem plagas extensa. Numerus vero Asymptotôn coeuntium quas curva quævis habere potest, æqualis est numero Asymptotôn parallelarum quas habere potest; priusquàm enim coeunt, evadunt parallelæ.

PROP. VI. PROBL.

Invenire Asymptotos Curvarum.

Ex datâ æquatione ad curvam reducatur ordinata y in seriem hujusmodi

$$y = Ax^n + Bx^{n-r} + Cx^{n-2r} + \&c.$$

eo citius convergentem quo major est abscissa x: sume ordinatam novam z æqualem terminis omnibus hujus seriei initialibus, qui augendo x non minuentur: et ordinatarum y, z differentia augendo x continuè diminuetur, atque ordinatæ ipsæ ad æqualitatem magis

magisque tendent : undè Linearum abscissam communem x et ordinatas y, z habentium crura tantò propiùs ad se invicem continuè accedunt, quantò magis producuntur, et tandem coïncidunt : atque adeò z est ordinata Asymptoti, quæ dabitur ex æquatione eam definiente. Q. E. I.

Coroll. 1. Igitur infinita sunt crurum genera; quo simplicior est ordinata z, eo simpliciùs erit crus: quod si sit z ordinata rectæ, crus erit hyperbolicum.

Coroll. 2. Si primus terminus seriei, qui augendo x minuitur, sit affirmativus, Asymptotos jacet inter curvam et abscissam; sin minus curva jacet inter Asymptoton et abscissam. Nam terminus ille seriei evadit æqualis parti ordinatæ inter crus et ejus Asymptoton interceptæ, ubi est x infinitè magna.

Coroll. 3. Ordinatæ Ovalium reduci nequeunt in series ad veritatem tanto magis accedentes quanto major est x. Nam si hoc fieri possit, ordinata ovalis esset quantitas realis cum abscissa est infinitè magna. Sed ordinata ovalis est imaginaria cum abscissa est infinitè magna. Undè liquet methodus dignoscendi ovales.

Coroll. 4. Simili prorsùs ratiocinio colligitur, quòd si quandò ordinata curvæ evadere possit infinitè magna, non item abscissa; valor or-

dinatæ haberi nequit in serie eo citiùs convergente quo major est abscissa.

Coroll. 5. Omnis linea imparis cujusque ordinis pergit in infinitum. Etenim linea ordinis imparis designatur æquatione imparium dimensionum, adeoque ad minimum reperietur una series eo citiùs convergens quo major est x, propterea quod æquatio imparium dimensionum ad minimum unam habet radicem possibilem. Et series istius modi (per *Coroll.* 3.) ad ovales non extenditur, ergo ad curvas quæ progrediuntur in infinitum.

Coroll. 6. Hinc etiam sequitur, quod ovalium tum abscissæ tum ordinatæ semper sunt parium dimensionum. Nam si esset alterutra imparium curva (per *Coroll.* 5.) pergeret in infinitum.

Coroll. 7. Linea quævis tot habere potest Asymptotos quot ipsa est dimensionum et nunquam plures. Nam tot habere potest, quot habet radices æquatio quæ dat primum terminum seriei $Ax + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} +$ &c. id est quot curva est dimensionum, ut constat ex serierum doctrinâ.

Coroll. 8. Si terminorum initialium plures valores coincidant, Asymptoti plures in unam coibunt: et figura habebit crura plura solito ad easdem plagas extensa: ut accidit Conchoidi

Veterum.

Veterum, quæ habet quatuor crura ad unicam Asymptoton jacentia.

Coroll. 9. Si numerus dimensionum curvæ sit par, et numerus Asymptotôn impar; vel si numerus dimensionum sit impar, et numerus Asymptotôn par, figura habebit duo crura ad unicam Asymptoton jacentia quæ in plagas easdem in infinitum serpunt.

Exempla.

1. Series $x - \frac{1}{3}a + \frac{a^2}{3x}$ &c. quam (in *Exemplo* 1. *Prop.* 2.) invenimus pro radice æquationis $y^3 - a^2y + axy - x^3 = 0$, indicat curvam illam habere Asymptoton æquatione $z = x - \frac{1}{3}a$ designatam, adeoque ejus crura esse hyperbolica. Et quia $\frac{a^2}{3x}$, terminus primus seriei qui augendo x minuitur, est affirmativus, Asymptotos jacet (per *Coroll.* 2. *Prop.* 6.) inter curvam et abscissam. Et quoniam unica tantùm series istiusmodi obtineri potest, figura non habet nisi duo crura ad unicam Asymptoton rectam jacentia.

2. Series illa $\frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} - \frac{a^4}{6x^3}$ — &c. quam (in *Exemp.* 2. *Prop.* 2.) invenimus pro radice

æquationis $y x^3 + a y x x + a^2 x x - 2 a^3 x = 0$ indicat abscissam esse Asymptoton habentem duo crura ad diversas ejus partes jacentia et in plagas oppositas extensa.

3. Series $x - \frac{1}{3} a + \frac{a^3}{81 x^2}$ &c. quæ est radix æquationis $y^3 + a x y - x^3 = 0$, indicat curvam illam habere duo crura ad easdem ejusdem Asymptoti rectæ partes jacentia et in plagas oppositas protensa.

4. Series illæ duæ $x + \frac{1}{2} a - \frac{a^2}{4 x}$ &c. et $2 x + a - \frac{2 a^2}{7 x}$ &c. quæ (in *Ex.* 4. *Prop.* 2.) prodiere pro radicibus æquationis $x^2 y^2 - 3 x^2 x y + 2 x^2 x^2 - a x y^2 + a^2 x^2 = 0$ indicant illam æquationem designare curvam habentem duas Asymptotos rectas, quarum quælibet habet duo crura ad diversas ejus partes jacentia et in plagas oppositas protensa.

5. Series duæ $x + \frac{a^2}{\sqrt{a x}} - \frac{a^3}{2 x^2}$ &c. $x - \frac{a^2}{\sqrt{a x}}, - \frac{a^3}{2 x^2}$ &c. indicant duas Asymptotos in unam coisse; et illam habere duo crura ad diversas ejus partes jacentia et in plagas easdem infinitè progredientia. Adeoque

ordinatæ Asymptoti illi parallelæ (per *Coroll.* 4. *Prop.* 4.) erunt unius tantùm dimensionis. Habet verò curva aliam Asympoton quæ ex aliâ serie dabitur.

Scholion.

Methodus inveniendi Asymptotos in hâc Propositione exposita est maximè generalis; sunt et aliæ methodi quamplures particulares inveniendi Asymptotos rectas, quas tamen omnes comprehendit ea jam tradita: considerari potest Asymptotos recta ut tangens ad punctum curvæ infinitè distans, et hoc modo reducitur Asymptotôn doctrina ad doctrinam tangentium, vel considerari possunt Asymptoti tanquam extremæ crurum partes in directum productæ. Sed omnes hæ methodi præsupponunt, aliquo saltem modo, serierum doctrinam.

Vide fig. 4. Invenienda sit Asymptotos Curvæ ALH, quam designat æquatio $y^3 - axy - x^3 = 0$, ubi x et y easdem designant rectas quas in quintâ Propositione designabant. Capiatur æquationis fluxio, et erit $3y^2\dot{y} - ax\dot{y} = 3x^2\dot{x} + ay\dot{x}$, undè $\dot{x} : \dot{y} :: 3y^2 + ax : 3x^2 + ay$, hoc est, HG ad GK vel $DE : EH :: 3y^2 - ax : 3x^2 + ay$, pro y substitue x ejus valorem, quum est x

infinitè magna; et erit $DE : EH :: 3x^2 - ax : 3x^2 + ax$, et sumendo rationem ultimam. $DE : EH :: 3x^2 : 3x^2$, id est, in ratione æqualitatis. Datur igitur Asymptotos DH positione. Restat jam ut inveniatur in Abscissâ punctum D per quod transit Asymptotos. Quoniam mox ostensum est esse $DH : EH$ vel $DE : y :: 3y^2 - ax : 3x^2 + ay$ erit

$$DE = \frac{3y^3 - axy}{3x^2 + axy} = \frac{3x^3 - ax^2}{3x^2 + ax}$$

ob y æqualem x. Subducatur jam recta illa DE ex abscissâ x et restabit AD

$$= x - \frac{3x^3 - ax^2}{3x^2 + ax} = \frac{3x^3 + ax^2 - 3x^3 + ax^2}{3x^2 + ax}$$

$$= \frac{2ax^2}{3x^2 + ax} = \frac{2}{3}a;$$

quoniam est x infinitè magna. Et indè datur Asymptotos DH. Hìc notandum est, quod in hoc calculo præsupponitur serierum doctrina: propterèà quod oportet invenire y quando x est infinitè magna: hoc vero absque serie universaliter obtineri nequit.

Aliquando non licet invenire Asymptotos reducendo Ordinatam in seriem. Ut si esset æquatio ad lineam quarti ordinis.

$$y = \frac{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}{fx^3 + gx^2 + hx + k};$$

ubi est Abscissa $AB = x$, Ordinata $BC = y$. Reducatur y in seriem

$$\frac{ax}{f} + \frac{bf - ag}{f^2} + \&c.$$

Ex hâc serie invenietur unica tantùm Asymptotos FE; reliquæ enim Asymptoti, Ordinatæ parallelæ ex illâ non prodeunt: prodibunt tamen reducendo valorem Abscissæ in seriem ex dignitatibus ordinatæ descendentibus confectam; sed faciliùs hoc modo. Patet enim Ordinatam evadere infinitè magnam, adeoque curvæ Asymptoton, quotiescumque quantitas $fx^3 + gx^2 + hx + k$ evadit nihil: et hoc ter accidere potest, propter æquationis cubicæ $fx^3 + gx^2 + hx + k = 0$, tres radices. Nam si æquationis illius radices omnes sint reales et inæquales, eæ sunto AG, AD, AH, (*fig.* 5.) et tres Ordinatæ per puncta G, D, H transeuntes erunt totidem Asymptoti. Quare in illo casu curva habet omnino quatuor Asymptotos et octo crura adjacentia; uti in schemate videre est. At si æquationis illius duæ radices æquales sint, duæ Asymptoti coibunt; atque evanescent crura quæ priùs inter eas contenta erant. Et curva habebit duas tantùm Asymptotos cum sex cruribus. Si æquationis supradictæ radices omnes sint æquales, aut earum duæ imaginariæ, vel coibunt

tres Asymptoti vel duæ evanescent, at in utroque casu figura habebit duas Asymptotos sese secantes; in quarum angulis oppositis jacent hyperbolæ oppositæ ad instar hyperbolæ conicæ.

In Asymptotôn rectarum inventione, non semper necesse habemus ad series recurrere. Nam assumi potest æquatio universalis designans omnes curvas generis alicujus, et indè serierum ope construi potest Canon generalis, qui sufficiat ad inventionem Asymptotôn linearum omnium illius ordinis. Ut si esset æquatio

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0;$$

ad conisectiones, ubi est x abscissa, y Ordinata; suppono y æqualem huic seriei

$$ax + b + cx^{-1} + \&c.$$

Et determinando coefficientes, uti jam ostensum est, invenietur esse a radix æquationis $Aa^2 + Ba + C = 0$, undè dabitur a; eritque

$$b = -\frac{Da + E}{2aA + B}\quad c = -\frac{Ab^2 + Db + F}{2aA + B}.$$

Si æquatio sit

$$Ay^3 + Bxy^2 + Cx^2y + Dx^3 + Ey^2$$
$$+ Fxy + Gx^2 + Hy + Kx + L = 0$$

ad Lineas tertii ordinis, erit a radix æquationis:

$$Aa^3 + Ba^2 + Ca + D = 0,$$

$$b = -\frac{Aa^2 + Ba + C}{3Ea^2 + 2Fa + G}$$ atque erit

$$c = \frac{-3Aab^2 + Bb^2 + Eab + Fb + Ha + K}{3Aa^2 + 2Ba + C}.$$

Quibus expressionibus semel inventis, invenire licet Asymptotos rectas harum curvarum absque recursione ad series. Et notandum est quod a semper dat inclinationem Asymptoti ad abscissam, b dat distantiam inter principium Abscissæ et punctum in quo Asymptotos eandem secat, c denique ostendit ad quas Asymptoton partes jacent earum crura. Hæc omnia ex propositione et ejus corollariis admodùm manifesta sunt.

PROP. VII. PROBL.

Invenire numerum et plagam crurum Asymptoton aliquam adjacentium.

Cas. 1. Sit primò curva, cujus Asymptotos recta AD per initium Abscissæ transiens (*fig.* 6.), Abscissa $AB = x$, et ipsi AD parallela sit Ordinata $BC = y$. Reducatur y in seriem $\frac{A}{x^n} + \frac{B}{x^{n-r}} + \frac{C}{x^{n-2r}} +$ &c, eo citiùs convergentem quo minor est x. Et n index ipsius x semper erit affirmativus, propterea quod quum est x infinitè parva, Ordinata y coincidit cum Asymptoto, et per

consequens est infinitè magna. Jam sit x infinitè parva, et evadet $y = \frac{A}{x^n}$ accuratè, qui valor est infinitè magnus et affirmativus; quare curva habet crus unum ad easdem Asymptoti AD partes jacens cum ordinatâ BC, et in easdem cum Ordinatâ partes extensum. Mutari jam concipe signum ipsius x, et eam etiannum manere infinitè parvam; atque si n sit numerus integer vel fractus cum denominatore impare, figura habebit aliud crus ad alias Asymptoti partes jacens, et in easdem cum priori plagas extensum, si n est numerus par, at in oppositas si sit n impar vel fractus cum denominatore impare. Si verò sit n fractio cum denominatore pare, signum ipsius x mutari nequit, at Asymptotos habebit duo crura ad easdem ejus partes jacentia et in plagas oppositas serpentia.

Cas. 2. Si Asymptotos sit curva, numerus crurum dignoscitur ex numero valorum Ordinatæ coeuntium, cum Abscissa est infinitè magna.

Si alii sint serierum casus, alii itidem erunt crurum casus, at eorum plagæ et numerus semper innotescent. Q. E. I.

Coroll. 1. Si n sit numerus integer et par; Asymptotos habet duo crura ad diversas ejus

partes jacentia et in plagas easdem progredientia.

Coroll. 2. Si n sit integer et impar, vel fractus cum impare denominatore, Asymptotos habet duo crura ad diversas ejus partes jacentia et in plagas oppositas protensa.

Coroll. 3. Si n sit fractus cum denominatore pare, Asymptotos habet duo crura ad easdem ejus partes jacentia et in plagas oppositas serpentia.

Coroll. 4. Hinc etiam comparantur longitudines Asymptotôn inter se. Undè constabit quasdam ad se invicem datam habere rationem, alias vero esse aliis infinitè majores vel minores.

Coroll. 5. Quamvis omnia crura cum Asymptotis suis tandem coïncidere censenda sunt; tamen in distantiis æqualibus utcunque magnis aliqua crura ad Asymptotos suas aliis infinities propinquiora accedunt.

PROP. VIII. THEOR.

Æquatio $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 +$ &c. designat figuram habentem duo tantum crura infinita ad easdem vel oppositas plagas progredientia prout index dignitatis x in termino altissimo est numerus par vel impar.

Sensus propositionis est, quod æquationes $y=a+bx$, $y=a+bx+cx^2+dx^3$, $y=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5$, &c. ubi indices terminorum altissimorum sunt numeri impares, designant figuras habentes duo tantùm crura infinita ad oppositas plagas protensa; et quod æquationes

$y=a+bx+cx^2$, $y=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$,
$y=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+gx^6$, &c.

ubi terminorum altissimorum indices sunt numeri pares, designant figuras habentes duo tantùm crura infinita ad eandem plagam pergentia.

Propositio verò sic demonstratur.

Concipe abscissam x perpetuo augeri, et simul augebitur ordinata y; sit x tandem infinitè magna, et erit etiam y infinitè magna; adeoque figura habet crus infinitum. Cum vero ordinata y est infinitè magna, pendet ejus signum, hoc est, plaga cruris infiniti, ex signo termini altissimi, quoniam in illo casu is est reliquis infinitè major. Evadat jam x negativa, id est, sumatur abscissa ad alteras partes, et ad illas partes infinitum augeatur; atque etiam augebitur y in infinitum; undè curva habet crus aliud infinitum. Si index termini altissimi sit par, ejus signum in utroque casu idem est,

sin impar in uno casu erit affirmativus, in altero negativus. Cum igitur plaga crurum pendet ex signo termini altissimi, in primo casu pergent crura ad plagas easdem, in secundo ad oppositas. Q. E. D.

Pendet itaque tota hujus demonstrationis vis ex termino altissimo; adeoque nihil refert quomodo sese habeant termini intermedii. Eodem res redit, utrum affirmentur vel negentur; utrum sint in æquatione vel non; nam demonstratio ab illis minimè turbabitur.

Scholion.

Propositionem hanc eo consilio præmisi, ut per eam facilior pateret aditus ad quasdam æquationum affectiones à nemine quantùm scio huc usque satis expositas, at necessario intelligendas ab eo qui sequentem curvarum enumerationem aggreditur. Usus verò propositionis exemplis sequentibus statim apparebit in dignoscendis realibus et imaginariis radicibus æquationum, idque vel calculo, vel describendo curvam; sed et describendo curvas construuntur æquationes; satis quidem expeditè, modo quis hâc methodo procedere assuetus sit. Nam si æquatio sit cubica, sufficit invenire quinque vel sex curvæ puncta; si Biquadratica, sufficit invenire octo vel decem.

Exemplum primum.

Sit $y = x^2 + Ax + B$ æquatio designans curvam habentem duo crura ad easdem plagas protensa, cujus abscissa $AB = x$, ordinata $BC = y$. AB vel secat curvam in duobus punctis D, E, (*fig.* 7.) vel in nullis (*fig.* 8.). Sit jam $y = 0$, vel $x^2 + Ax + B = 0$, et æquationis illius radices erunt AD et AE in figurâ 7ª, at in figurâ 8ª sunt imaginariæ. Vides igitur quod, in casu primo, existente abscissâ minore minimâ radice AD vel majore maximâ AE, ordinata correspondens erit affirmativa: atque ordinata inter puncta D et E erecta est negativa. Hæc autem omnia vera sunt ex hypothesi quod terminus altissimus x^2 sit affimativus. Igitur D, E sunt limites in quibus ordinata y nec affirmatur neque negatur sed nulla est, hoc est in quibus quantitas $x^2 + Ax + B$ nec affirmatur neque negatur, sed nihil est. Et ordinatæ punctis D, E proxime et ad diversas eorum partes jacentes, signa contraria semper habebunt. In casu secundo, quando abscissa minimè secat curvam, ordinatæ omnes ejusdem sunt signi tendentes ad plagam crurum.

Supponamus jam esse aliam curvam eandem Abscissam AB habentem: Ordinatam

vero quæ realis sit quum Ordinata y est affirmativa, quæque imaginaria sit quum y est negativa. Et in casu primo quando æquationis $x^2 + Ax + B = 0$ radices sunt reales (*fig.* 7.) Ordinatæ novæ curvæ per puncta D et E transeuntes semper tangent curvam et puncta contactûs erunt limites per quos ordinatæ motu parallelo latæ transeunt ipso temporis momento, quo evadunt possibiles ex impossibilibus, aut è contrà. Atque Ordinatæ inter puncta D, E erectæ reales aut imaginariæ erunt prout negatur aut affirmatur terminus x^2. Ordinatæ ad alia quævis abscissæ puncta erectæ reales aut imaginariæ erunt prout affirmatur aut negatur terminus ille x^2.

In casu secundo ubi abscissa non secat curvam, Ordinatæ omnes hujus novæ curvæ reales quidem erunt quandò affirmatur x^2, sed omnes prorsus imaginariæ quando negatur idem terminus.

Sit FG ordinata maxima (*fig.* 7.) inter puncta D, E erecta, at in (*fig.* 8.) omnium minima, et in illo casu erit $\dot{y} = 0$, vel $2x\dot{x} + A\dot{x} = 0$, undè $x = -\frac{1}{2}A = AF$: quem valorem in æquatione pro x substitue, et invenies $y = B - \frac{1}{4}AA = FG$. Et patet quod Abscissa secat vel non secat curvam,

prout Ordinata illa FG tendit ad contrarias vel easdem plagas cum cruribus; hoc est æquationis $x^2 + Ax + B = 0$ radices sunt possibiles quando affirmatur quantitas $\frac{1}{4}AA - B$, et impossibiles quando negatur eadem.

Exemplum secundum.

Sit æquatio $y = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ designans curvam habentem duo crura in plagas oppositas protensa, cujus Abscissa $AB = x$, Ordinata $BC = y$. AB vel secat curvam in tribus punctis (*fig.* 9.) vel in unico (*fig.* 10. 11.). Sit $y = x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$, et hujus æquationis radices erunt AD, AE et AF. Igitur si radices omnes sint reales ut in (*fig.* 9.) existente Abscissâ minore radice mediâ AE et majore minimâ AD, vel majore maximâ AF, Ordinatæ valor respectivus erit affirmativus; et ordinatæ ad alia quævis puncta erecta erunt negativæ. Negativæ enim et affirmativæ evadunt ordinatæ semper per vices. Jam sit alia curva cujus Ordinata possibilis fit, quando y est affirmativa, impossibilis verò quando negativa; et Ordinata illa nova subibit vices omnes possibilitatis, quas subit y mutationis signorum $+$ et $-$: scilicet tres Ordinatæ ad puncta D, E, F erecta tangent curvam, et puncta contactûs erunt limites in

quibus y incipit vel desinit esse. Et si Ordinatæ affirmativæ tendant ad eandem plagam cum ordinatâ $B\,C$, intrà limites D, E continebitur curva partem figuræ constituens: jacebit verò altera pars figuræ ad easdem partes puncti F cum $B\,C$: et semper progredietur in infinitum ab F versùs B, quoniam unicus illi tantùm adest limes. In casu altero, ubi Abscissa secat curvam in unico puncto (*fig.* 10. 11.) si x^3 terminus altissimus affirmatur, ordinatæ omnes negativæ aut affirmativæ erunt prout jacent ad partes puncti D easdem vel contrarias iis ad quas jacet A. Et omnia quæ de primo casu dicta sunt, ad hunc casum mutatis mutandis facilè accommodantur.

Methodus determinandi radices reales et imaginarias æquationis cubicæ.

Pone $y = 0$, et erit $3\,x^2 + 2\,A\,x + B = 0$; cujus æquationis radices in fig. 9ª et 10ª, scilicet $A\,G$, $A\,K$, at impossibiles in fig. 11ª. Igitur si æquationis $3\,x^2 + 2\,A\,x + B = 0$ radices sint impossibiles, id est, (per *Exemp.* 1) si $\frac{1}{9}\,A\,A - \frac{1}{3}\,B$ vel $\frac{1}{3}\,A\,A - B$ sit negativa quantitas, æquationis $x^3 + A\,x^2 + B\,x + C$ radices sint reales ut in fig. 9. 10, æquationis $x^3 + A\,x^2 + B\,x + C$ radices omnes sunt reales ubi Ordinatæ $G\,H$, $K\,L$ contraria ha-

bent signa, (*fig.* 9.) & imaginariæ quando eadem habent.(*fig.* 10.)Pone $DD = AA - 3B$, invenies

$$GH = C + \frac{2A^3 - 3A^2D + D^3}{27},$$

$$LK = C + \frac{2A^3 + 3A^2D - D^3}{27}.$$

Et hisce valoribus semel inventis, facilè est invenire quæ radices reales sunt, quæ non.

Exemplum tertium.

Sit jam $y = x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ æquatio designans lineam habentem duo crura infinita ad easdem plagas protensa. Pone $x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$; hujus æquationis radices quatuor sunt (*fig.* 12.), RA, RB, RC, RD; at in (*fig.* 13, 14, 16.) duæ radices impossibiles, et in fig. 15, 17. omnes sunt impossibiles. Pone $y = 0$, et erit $4x^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D = 0$, cujus æquationis tres radices (*fig.* 12, 13, 14, 15) sunt RE, RG, RL: at in fig. 16, 17 æquatio illa unicam tantum habet radicem RE. In primo casu (*fig.* 12.) si ordinatarum EF, GH, LK, duæ sunt negativæ, et tertia affirmativa, æquatio $x^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$, habet quatuor radices possibiles. Si ordinatarum duæ sint affirmativæ et tertia negativa

(*fig.* 13.)

(*fig.* 13.) vel si omnes tres sint negativæ (*fig.* 14.) æquatio non habet nisi duas radices reales: si ordinatæ omnes sint affirmativæ (*fig.* 15.) radices omnes erunt impossibiles.

In secundo casu, quando æquationis $4x^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D = 0$ radix unica erit possibilis (*fig.* 16, 17.) Si ordinata EF sit negativa (*fig.* 16.) radices duæ erunt reales tantùm: at si ordinata illa sit affirmativa (*fig.* 17.) omnes radices erunt imaginariæ. Hi sunt casus æquationis Biquadraticæ.

Undè inveniri potest canon generalis pro dignoscendis radicibus realibus et imaginariis æquationum biquadraticarum, ut in *Exemplis primo* et *secundo* fecimus pro æquationibus quadraticis et cubicis. Hoc verò prolixum admodùm requirit calculum. Sufficiat quod novimus quomodò tractanda est æquatio particularis, ubi calculus non erit adeò laboriosus. Eadem methodus ad omnes æquationes extenditur. Si sit nova curva ordinatam habens realem quando hujus est affirmativa et imaginariam quando hujus curvæ ordinata est negativa, vices omnes possibilitatis et impossibilitatis facillimè innotescunt per ea quæ diximus in *exemplis duobus primis.*

Ex hisce exemplis satis apparet numerum radicum impossibilium semper esse parem. Item

sequitur, quod si sit æquatio

$$x^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \&c. = 0,$$

et sit $B^2 - Cn^2(n-2)(n-3)(n-4)$ &c. quantitas negativa, æquatio illa ad minimum habebit duas radices imaginarias. Continuanda vero est series $n^2(n-2)(n-3)$ &c. donec n per continuam unitatis subductionem tandem exhauriatur. Et si desit terminus secundus Bx^{n-1}, et Cx^{n-2} huic proximus sit affirmativus, æquatio ad minimum habebit duas radices imaginarias.

Ex propositionibus hactenùs traditis invenire licet genus, positionem, plagam et numerum crurum infinitorum: et ex hâc propositione ejusque exemplis invenies quæ crura conjunguntur: adeoque invenies formam curvæ. Et faciendo rectam gyrare circà punctum aliquod idoneum, et secare Parabolas quas in hâc propositione descripsimus, habebuntur omnes casûs alicujus æquationis radicum possibiles; hoc est, omnes formæ curvarum quas æquatio generalis designat: et indè enumerantur Linearum species, siquidem species curvarum non tam ab ipsarum intimâ naturâ, quam à formâ pendere volumus.

Propositiones quæ sequuntur continent consimiles aliquot curvarum rationalium proprietates ab æquationum naturâ immediatè fluentes.

PROP. IX. PROBL.

Invenire numerum punctorum quæ determinant lineam alicujus ordinis.

Linea quævis describi potest per tot puncta, quot sunt coefficientes in æquatione generalissimâ eam definiente et non plura; ut constat ex methodo *D. Newtoni* universali describendi curvas per data totidem puncta quot eas determinant : cujus specimen dedit in sectionibus conicis ad algebræ suæ problemata 54,57. Et hactenùs annotatum est, quod existente n numero dimensionum curvæ, erit $\frac{n^2+3n}{2}$ numerus coefficientium in æquatione generalissimâ lineas omnes alicujus ordinis definiente ; et proinde etiam erit $\frac{n^2+3n}{2}$ numerus punctorum determinantium curvam cujus dimensio est n.

Itaque recta determinatur ex duobus punctis, sectio coni ex quinque; Linea tertii ordinis ex novem, Linea quarti ex quatuordecim et sic porrò.

Coroll. 1. Ex dato numero punctorum determinantium dabitur dimensio curvæ. Sit enim m punctorum numerus, et erit

$m = \frac{n^2 + 3n}{2}$ undè et vicissim invenies

$n = \frac{-3 + \sqrt{(8m + 9)}}{2}$. Ut si esset $m = 20$, invenies $n = 5$.

Coroll. 2. Ex hâc propositione invenies numerum punctorum quæ determinant lineam aliquam particularem, si possibile sit; sunt enim quædam lineæ quas nullus punctorum numerus determinat.

Exempla.

1. Sit $y = ax + b \pm \sqrt{(cx + d)}$ æquatio generalissima ad Parabolam conicam : quum igitur quatuor tantùm sunt coefficientes, Parabola determinatur ex quatuor punctis. Quatuor puncta non sufficiunt ad determinandam Hyperbolam aut Ellipsin, sed quinque nimia sunt.

2. Item sectio coni cujus datur diameter, et angulus ordinatarum, determinatur ex tribus punctis, parabola ex duobus; duo non sufficiunt ad determinandam hyperbolam aut Ellipsin, sed tria nimia sunt.

3. Hyperbola conica, datâ positione ejus Asymptotò, determinatur ex quatuor punctis.

4. Parabola conica, datâ positione ejus axe, determinatur ex tribus punctis.

5. Parabolæ quinque *divergentes*, datâ plagâ crurum, determinantur ex sex punctis; parabola *Cartesii* ex quinque; parabola cubica ex quatuor.

PROP. X. THEOR.

Ducantur duæ rectæ parallelæ secantes curvam in tot punctis quot ipsa est dimensionum; recta quæ ita secat has parallelas ut summa partium ex uno ejus latere consistentium et ad curvam terminatarum æquetur summæ partium ex altero ejus latere consistentium ad curvam itidem terminatarum, ita etiam secabit omnes rectas hisce parallelas.

Sit enim curvæ alicujus abscissa $AB = x$, ordinata $BC = y$, æquationis relationem inter x et y definientis terminus secundus sit $(ax + b) y^{n-1}$: sume in rectâ AB, $AF = \frac{-b}{a}$ et ordinatæ parallelam $AE = \frac{-b}{n}$; junge EF; si ea sumatur pro abscissâ, dico summam ordinatarum ex unâ ejus parte æquari summæ ordinatarum ex alterâ parte.

Nam sit $y^n + (ax + b) y^{n-1} + \&c. = 0$, æquatio exprimens relationem inter x, y. Producatur CB (*fig.* 18.) secans FE in D et sit abscissa nova $ED = z$, Ordinata nova

$DC = v$: ponatur $AB : ED :: A : 1$, id est $x : z :: A : 1$, undè $x = Az$.

$FA : AE :: FB : BD$, vel $\frac{-b}{a} : \frac{-b}{n} ::$

$Az + \frac{b}{a} : BD = \frac{aAz + b}{n}$. $BC =$

$$= DC - DB = v - \frac{aAz + b}{n} = y,$$

undè (per Theor. *D. Newtoni*) $y^n = v^n - (aAz + b)\, v^{n-1}$ &c. $y^{n-1} = v^{n-1}$ &c. Hosce valores substitue in æquatione

$$y^n + (ax + b)\, y^{n-1} + \&c. = 0,$$

et videbis v^{n-1} evanescere, id est, æquationis terminum secundum deesse: igitur valores ipsius x erunt partìm negativi et partìm affirmativi, et summa affirmativorum æquabitur summæ negativorum: vel, quod perindè est, æquentur summæ Ordinatarum ex Abscissâ ad Curvam in easdem partes extensarum. Q. E. D.

Recta quæ ita secat ordinatas appellatur Curvæ diameter.

Coroll. 1. Duc rectas duas parallelas secantes Lineam secundi ordinis in duobus punctis, recta quæ has bisecat, bisecabit omnes illis parallelas. Adeoque æquatio $y^2 = ax^2 + bx + c$ designat omnes lineas secundi ordinis.

Coroll. 2. Duc rectas duas quasvis parallelas,

secantes Lineam tertii ordinis in tribus punctis; recta quæ ita secat has parallelas, ut summa duarum partium ex uno ejus latere consistentium, et ad curvam terminatarum, æquetur parti tertiæ, ex altero ejus latere consistenti, et ad curvam terminatæ, ita etiam secabit omnes rectas hisce parallelas.

Coroll. 3. Duc rectam DF (*fig.* 19.) secantem lineam secundi ordinis in duobus punctis B, E, ejusque duas Asymptotos in aliis duobus D, F; dico partes illius rectæ interceptas inter Asymptotos et earum crura sibi invicem æquari. Duc diametrum CA bisecantem BE omnesque rectas illi parallelas. Quia curva coincidit cum Asymptotis ad distantiam infinitam, coeunt in illo casu puncta B, D; E, F: adeoque diameter bisecat ordinatas in Asymptotis terminatas in distantiâ infinitâ: undè per naturam rectæ in omni distantiâ eas bisecabit, hoc est, ubique $AD = AF$, sed $AB = AE$, ergo $BD = EF$. Q. E. D.

Coroll. 4. Duc rectam FH (*fig.* 20.) secantem Lineam tertii ordinis in tribus punctis E, D, H; ut et tres ejus Asymptotos in tribus aliis F, C, G; dico FE, GH partes duas hujus rectæ inter Asymptotos et crura interceptas et ab Asymptotis ad curvam in-

easdem plagas extensas æquari parti tertiæ CD inter Asymptoton tertiam et ejus crus interceptæ, et ab Asymptoto ad curvam in oppositas plagas extensæ. Ducatur enim Diameter AB quæ ita secat Ordinatas, ut sit $BD+BE=BH$; quoniam in distantiâ infinitâ Asymptoti coincidunt cum suis cruribus, coeuntibus punctis F, E; C, D; G, H; Diameter AB ita etiam secabit ordinatas in Asymptotis terminatas in distantiâ infinitâ ut sit $BC+BF=BG$: at si hoc accidat in qualibet distantiâ, accidet in omni, ergo est universaliter $BC+BF=BG$, sed $BD+BE=BH$; ergo demendo æqualia ab æqualibus, erit $BD-BC+BE-BF=BH-BG$, hoc est, $CD-EF=GH$, vel $CD=EF+GH$. Q.E.D.

Eâdem facilitate simile demonstratur de curvis superiorum ordinum.

Scholion.

Hanc propositionem demonstravi considerando coefficientem termini secundi esse summam omnium radicum sub signis propriis collectam. Coefficiens tertii termini est factum sub singulis duabus radicibus, coefficiens quarti sub singulis tribus, quinti sub singulis quatuor, et sic in infinitum. Undè facillimè sequitur series theorematum sequentium ad libitum continuanda.

1. Ducantur quinque parallelæ secantes lineam tertii vel superioris ordinis in tot punctis quot curva habet dimensiones : sectio conica vel linea recta, quæ ita secat has parallelas, ut summa rectangulorum sub partibus earum inter curvam et sectionem conicam vel rectam interceptis, et à curvâ ad sectionem coni vel rectam in easdem plagas extensis, æquetur summæ rectangulorum sub partibus earumdem parallelarum ad alteras sectionis coni vel rectæ plagas à curvâ extensis, et in curvâ terminatis, ita secabit omnes rectas hisce parallelas.

2. Ducantur novem parallelæ secantes curvam quarti vel superioris ordinis in tot punctis quot curva est dimensionum. Ducatur linea tertii vel inferioris ordinis secans has novem parallelas ; et si componantur Parallelepipeda sub singulis tribus partibus harum parallelarum inter curvam et lineam tertii vel ordinis inferioris interceptis : atque in unaquaque novem parallelarum, si parallelepipeda quæ prodeunt affirmativa, æqualia deprehendantur iis quæ prodeunt negativa ; idem accidet in omnibus rectis prioribus novem parallelis. Et sic porrò.

Hæ Lineæ quæ ita secant parallelas, tanquam curvarum diametri, (ut ita dicam) quodammodo considerari possunt.

PROP. XI. THEOR.

Sit A E B D (fig. 21.) *Linea secundi ordinis, quam secet recta* A B *in duobus punctis* A, B; *ut et recta* D E *in duobus aliis* D, E, *harum concursus sit* C. *Dico esse* A C × C B *ad* D C × C E *in ratione datâ; modo detur rectarum* A B, D E *inclinatio ad se invicem.*

Supponamus enim Abscissam $AC = x$, et rectarum DC, CE quamlibet ambigue designare ordinatam y: atque Curva hujusmodi æquatione $y^2 + (ax + b)y + cx^2 - dx = 0$, designabitur, in quâ quantitas determinata non reperietur, quoniam principium Abscissæ est in curvâ. Ut inveniatur AB, sit $y = 0$, et evanescent termini in quibus ea reperitur, atque erit $cx^2 - dx = 0$, undè in illo casu est $x = \frac{d}{c} = AB$, ergo $AB - AC = \frac{d}{c} - x = BC$: cujus signum mutetur quoniam puncta A, B jacent ad partes puncti C contrarias, et erit $BC = x - \frac{d}{c}$. Et indè $AC \times BC = x^2 - \frac{dx}{c}$. Constat verò per naturam æquationum, terminum ultimum in quo radix non reperitur, esse factum sub omnibus radicibus; hoc est $DC \times CE = cx^2 - dx$, et hoc rectangulum

est ad $AC \times CB = x^2 - \frac{dx}{c}$ ut c ad unitatem: at servatâ rectarum AB, DE inclinatione ad invicem, non mutabitur quantitas c, ergo neque dicta ratio facti $AC \times CB$ ad $DC \times CE$. Q. E. D.

Ex hac propositione tanquam totidem corollaria fluunt omnia, quæ tradere solent authores de sectionum conicarum diametris, verticibus, lateribus rectis et transversis, et ratione contentorum sub parallelarum segmentis.

PROP. XII. THEOR.

Sit A F G (fig. 22.) *Linea tertii ordinis, quam secet recta* A D *in tribus punctis* A, B, D, *ut et* F G *in tribus aliis* F, G, H; *harum concursus sit* C. *Dico esse* A C × B C × D C *ad* F C × G C × H C *in ratione datâ; modo detur rectarum* A D, F G *ad se invicem inclinatio.*

Ponamus esse Abscissam $AC = x$, et rectarum CF, CH, CG quamlibet ambigue designare ordinatam y: et curva hujusmodi æquatione designabitur $y^3 + (ax + b)y^2 + (cx^2 + dx + e)y = fx^3 - gx^2 + hx$; ubi quantitas data non reperietur propterea

quod initium Abscissæ est in curvâ. Sit $y=o$, atque erit $fx^3 - gx^2 + hx = o$, undè in illo casu est $x = \frac{g}{2f} \pm \sqrt{\left(\frac{g^2}{4f^2} - \frac{h}{f}\right)}$, hoc est

$$AB = \frac{g}{2f} - \sqrt{\left(\frac{g^2}{4f^2} - \frac{h}{f}\right)}, \text{ et}$$

$$AD = \frac{g}{2f} + \sqrt{\left(\frac{g^2}{4f^2} - \frac{h}{f}\right)}; \text{ ergo}$$

$$BC = x - \frac{g}{2f} + \sqrt{\left(\frac{g^2}{4f^2} - \frac{h}{f}\right)}, \text{ et}$$

$$CD = x - \frac{g}{2f} \pm \sqrt{\left(\frac{g^2}{4f^2} - \frac{h}{f}\right)} \text{ cum}$$

signo mutato. Undè est

$$AC \times BC \times DC = x^3 - \frac{gx^2}{f} + \frac{hx}{f}.$$

Sed per naturam æquationum est

$$FC \times HC \times GC = fx^3 - gx^2 + hx;$$

ideoque solidum prius est ad posterius ut unitas ad f: at servatâ inclinatione rectarum AD, FG, dabitur quantitas f; ergo etiam dicta ratio solidi $AC \times BC \times CD$ ad $FG \times GC \times HC$. Q. E. D.

Hinc tam facile consequuntur ea quæ tradidit *D. Newtonus* de Linearum tertii ordinis diametris, verticibus, lateribus rectis et transversis, ratione contentarum sub parallelarum segmentis, atque alia plurima; ut eadem plenius ostendere necessarium haud duxerim.

Sufficiat hìc obiter annotare, quod hâc methodo universali procedendo, scilicet argumentando à naturis æquationum, patescunt non solùm sectionum coni proprietates, quas tanto labore adinvenerunt Veteres, et tot ambagibus demonstratas dederunt, idque methodo quæ ad alias curvas extendi nequit; sed et proprietates curvarum omnium ordinum superiorum.

Hisce præmissis, pergerem ad Enumerationem linearum tertii ordinis, sed ob rei analogiam enumerare licet eas secundi. Hæ (per *Coroll.* 1. *Prop.* 10.) reducuntur omnes ad æquationem $y^2 = ax^2 + bx + c$; quæ æquatio, ut statim apparebit, designat Hyperbolam, Ellipsin aut Parabolam, prout terminus ax^2 affirmativus est, negativus vel nullus.

Enumeratio Linearum secundi ordinis.

PROP. XIII. THEOR.

Æquatio $y^2 = ax^2 + bx + c$ *designat figuram habentem quatuor crura infinita ad duas Asymptotos rectas jacentia.*

Liquet ferè hæc propositio ex *Exemplo primo Scholii Prop.* 8. sed argumento magis distincto sic evincitur.

Augeatur x in infinitum (*fig.* 23.), et duo

valores ordinatæ y hinc indè æquales etiam augebuntur in infinitum; quare figura habet duo crura infinita. Mutetur signum ipsius x, hoc est, sumatur abscissa ad alteras partes, et æquatio erit hæc $y^2 = ax^2 - bx + c$, ubi patet quod augendo x in infinitum, etiam augebitur y in infinitum: nam terminus affirmativus ax^2 erit omnibus reliquis multò major, modo x sit admodùm magna: quare curva habet alia duo crura, et omnino quatuor.

Reducatur y in seriem hujusmodi convergentem $y = \pm x\sqrt{a} \pm \frac{b}{2\sqrt{a}} \pm \frac{4ac - b^2}{8ax\sqrt{a}}$ &c. Undè (per *Prop.* 6.) ordinata Asymptoti erit $\pm x\sqrt{a} \pm \frac{b}{2\sqrt{a}}$. Igitur pro Asymptotis habet hæc curva duas rectas ex Abscissâ hinc indè æqualiter jacentes. Nam sume $AD = \frac{-b}{2a}$, in Abscissâ; per initium Abscissæ duc $dA\delta$ ordinatæ parallelam, in quâ sint Ad, $A\delta$, æquales $\frac{b}{2\sqrt{a}}$, ad contrarias puncti A partes sumptæ; junge Dd, $D\delta$, erunt illæ duæ Asymptoti. Ideoque figura habet quatuor crura hyperbolica ad duas rectas jacentia. Q. E. D.

Coroll. 1. Si b^2 majus sit $4ac$, crura jacent in angulis EDe, FDG; sin minus, jacent in angulis hisce deinceps: ut constat ex *Coroll.* 2. *Prop.* 6.

Coroll. 2. Hæc figura (per *Coroll.* 1. *Prop.* 4.) ejus Asymptotos non decussat, adeoque (per *Coroll.* 2. *Prop.* 1.) crura quæ in eodem angulo jacent, ductu continuo semper conjunguntur.

Coroll. 3. Undè hæc figura semper constat ex hyperbolis duabus inscriptis, in Asymptoton angulis oppositis jacentibus; et proindè unicam tantùm speciem constituit. Quæ est species prima Linearum secundi ordinis.

Coroll. 4. Si terminus ax^2 sit negativus, curva nequit excurrere in infinitum: ergo (per *Prop.* 1.) in se redit; et constat ex ovali unicâ, (*fig.* 24.). Quæ est species secunda. Hoc *Corollarium* facillimè colligitur ex *primo Exemplo Scholii propositionis octavæ*.

PROP. XIV. THEOR.

Si desit terminus a x^2, *æquatio* $y^2 = * bx + c$ *designat figuram habentem duo tantùm crura infinita parabolica in eandem plagam extensa.*

Patet enim quod augendo Abscissam x in infinitum (*fig.* 25.), simul augebuntur ordi-

natæ y valores, ergo curva habet duo crura infinita, et in eandem plagam protensa; quoniam existente x infinitè magna, ordinata y est eâ infinitè minor. Quod si mutetur signum ipsius x, æquatio evadet $y^2 = -bx + c$; postquam ergo eousque augetur x ut sit $bx = c$; curva ad illas partes ulteriùs pergere nequit, quia erit quadratum ordinatæ negativa quantitas, et indè ordinata ipsa impossibilis. Igitur curva habet duo tantùm crura. Per methodum serierum est

$$y = \pm\sqrt{bx} \pm \frac{c}{2\sqrt{bx}} + \&c.$$

Undè (per *Prop.* 6.) $\sqrt{bx}$ est ordinata Asymptoti ad Abscissam x pertinens; quumque hæc non sit ordinata rectæ, crura sunt Parabolica. Q. E. D.

Coroll. Crura hujus curvæ sunt sui generis simplicissima. Hæc figura constituit Linearum secundi ordinis speciem tertiam; et patet eas esse tres coni sectiones.

Enumeratio

Enumeratio Linearum tertii Ordinis.

PROP. XV. THEOR.

Omnes Lineæ tertii ordinis, reducuntur ad hos æquationum casus quatuor

$$x y^2 - e y = a x^3 + b x^2 + c x + d,$$
$$x y = a x^3 + b x^2 + c x + d,$$
$$y^2 = a x^3 + b x^2 + c x + d,$$
et $y = a x^3 + b x^2 + c x + d$.

Æquatio $(z + a) v^2 = (b z^2 + c z + d) v + e z^3 + f z^2 + g z + h$ (per *Coroll.* 1. *Prop.* 5.) comprehendit omnes lineas *secundi* ordinis: undè, si probavero illam æquationem semper reduci posse ad unam quatuor dictarum formarum, constabit propositio.

Cas. 1. Si æquationis terminus nullus desit, divide eam per $z + a$ coefficientem ipsius v^2, et erit

$$v^2 = \frac{(b z^2 + c z + d) v + e z^3 + f z^2 + g z + h}{z + a}$$

atque extrahendo radicem $v = \frac{b z^2 + c z + d}{2 z + 2 a} \pm p$, ubi p est latus quadratum partis valorum ipsius v vinculo quadratico inclusæ. Sit $AB = z$, (*fig.* 26.) BDC ordinata secans curvam in duobus punctis, adeoque rectarum BD, BC

quamlibet ambiguè representat ordinata v : id est :

$$BC = \frac{bz^2 + cz + d}{2z + 2a} + p, \quad BD = \frac{bz^2 + cz + d}{2z + 2a} - p.$$

Harum differentia $CD = 2p$. Biseca CD in F, ut sit $DF = p$, huic adde BD, et erit $BF = \frac{bz^2 + cz + d}{2z + 2a}$, quæ est ordinata Lineæ bisecantis ordinatas ad curvam terminatas : quæque in casu præsenti est hyperbola conica. Sit ea KF, ejusque Asymptoti GE, GH; quarum hæc parallela est ordinatæ DC, proptereà quod ordinata EF secat hyperbolam in unico puncto F. Sume Abscissam novam $GE = x$, ordinatam novam EC vel $ED = y$; eritque $EC = CF + FE$, $ED = CF - FE$, vel more algebraïco, $y = EF \pm EC$.

Undè in æquatione ad curvam, $2EF$ erit coefficiens ipsius y, ut constat ex naturâ æquationis Quadraticæ. Jam sit e data quantitas, et ex naturâ hyperbolæ erit $EF = \frac{e}{2x}$; ergo $\frac{e}{x}$ erit coefficiens ipsius y in æquatione curvam definiente : atque exindè æquatio necessariò induet hanc formam

$$y^2 - \frac{ey}{x} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x} \text{ vel}$$

$$xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d. \text{ Q. E. D.}$$

Cas. 2. Quod si desit terminus $z v^2$, æquatio erit hujusmodi

$$a v^2 = (b z^2 + c z + d) v + e z^3 + f z^2 + g z + h:$$

et erit $B F = \frac{b z^2 + c z + d}{2 a}$, quæ est Ordinata parabolæ conicæ bisecantis ordinatas. Si quando hoc accidat mutetur Abscissa z in ordinatam v, et æquatio erit

$$v^3 + (a z + b) v^2 + (c z + d) v = e z^2 + f z + g;$$

tolle terminum v^3 (per *Coroll.* 4. *Prop.* 5.) et æquatio erit

$$(a z + b) v^2 + (c z + d) v = e z^2 + f z + g:$$

quæ (per *Cas.* 1.) convertitur in hanc

$$x y^2 - e y = b x^2 + c x + d,$$

et hæc forma continetur in priori

$$x y^2 - e y = a x^3 + b x^2 + c x + d.$$ Q. E. D.

Cas. 3. Si desint termini $a v^2$, $d v$, erit $B F = \frac{b z^2 + c z}{2 z} = \frac{b z + c}{2}$, quæ est ordinata rectæ bisecantis ordinatas. In illo casu sume abscissam x in rectâ illâ bisecante à debito initio computatam, et ordinatam y priori v parallelam; et æquatio induet hanc formam $x y^2 = a x^3 + b x^2 + c x + d$, quæ continetur in priori. Q. E. D.

Cas. 4. Si desint termini $z v^2$, $a v^2$, restabit $(b z^2 + c z + d) v = e z^3 + f z^2 + g z + h$, quo in casu ordinata occurrit curvæ in unico

tantùm puncto. Tolle terminum $e z^3$ (per *Coroll.* 4. *Prop.* 5.) et æquatio erit

$$(b z^2 + c z + d) v = f z^2 + g z + h:$$

hæc æquatio, mutando abscissam z in ordinatam v, convertetur (per *Cas.* 1.) in hanc $x y^2 - e y = c x + d$, quæ continetur in formâ $x y^2 - e y = a x^3 + b x^2 + c x + d$. Q. E. D.

Cas. 5. Si desint termini $z v^2$, $a v^2$, $b z^2 v$, manebit $c z v + d v = e z^3 + f z^2 + g z + h$, ubì si pro v scribas y, et $x - \frac{d}{c}$ pro z, orietur $x y = a x^3 + b x^2 + c x + d$. Q. E. D.

Cas. 6. Si desint termini $z v^2$, $b z^2 v$, erit $BF = \frac{c z + d}{2 a}$, quæ est ordinata Lineæ bisecantis ordinatas CD; in illo casu sume abscissam x in rectâ illâ bisecante, et ordinatam v priori parallelam, et prodibit $y^2 = a x^3 + b x^2 + c x + d$. Q. E. D.

Cas. 7. Si desint termini $z v^2$, $a v^2$, $b z^2 v$, $c z v$, restabit $d v = e z^3 + f z^2 + g z + h$, quæ est hujus formæ $y = a x^3 + b x^2 + c x + d$. Q. E. D.

Reducuntur ergo omnes Lineæ tertii ordinis ad quatuor sequentes æquationum casus,

$$\left.\begin{matrix} xy^2 - ey \\ xy \\ y^2 \\ y \end{matrix}\right\} = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

ut opportebat.

PROP. XVI. THEOR.

Æquatio $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *designat figuram habentem sex crura hyperbolica ad tres Asymptotos jacentia.*

Sit $AB = x$, $BC = y$. Invenies

$$y = \frac{e}{2x} \pm \sqrt{\left(ax^2 + bx + c + \frac{d}{x} + \frac{e^2}{4x^2}\right)};$$

reducatur (per *Theor. Newtoni*) pars irrationalis in seriem $\pm \frac{e}{2x} \pm \frac{d}{e}$ &c., eò citiùs convergentem, quo minor est x; atque provenient ordinatæ valores $\frac{e}{x} + \frac{d}{e}$ &c. $- \frac{d}{e}$ &c. Valor hic ultimus indicat curvam secare ordinatam primam, puta in G. (*fig.* 27.). Valor autem ille $\frac{e}{x} + \frac{d}{e}$ &c. indicat (per *Coroll. Prop.* 7.) ordinatam primam esse Asympton, et habere duo crura ad diversas ejus partes posita, et in plagas oppositas tendentia. Evadat jam x utcunque magna et augebuntur

I 3

simul ordinatæ valores sine limite, quare curva habet alia duo crura infinita. Mutetur signum ipsius x, et æquatio evadet

$-xy^2 - ey = -ax^3 + bx^2 - cx + d$ vel

$xy^2 + ey = ax^3 - bx^2 + cx - d$, ubi patet quod etiamnum augeri potest x in infinitum et simul augebuntur ordinatæ valores, nunquam enim evadent impossibiles quum abscissa est satis magna. Undè figura habet alia duo crura et omnino sex.

Reducatur jam y in seriem eo citiùs convergentem quo major est x, atque invenietur

$$BC = x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} + \frac{4ac - b^2 + 4ae\sqrt{a}}{8ax\sqrt{a}} + \&c.$$

$$Bc = x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} + \frac{4ac - b^2 - 4ae\sqrt{a}}{8ax\sqrt{a}} + \&c.$$

Habet igitur (per *Prop.* 6.) figura duas Asymptotos rectas ab Abscissâ hinc indè æqualiter jacentes: nam sit $AD = \frac{b}{2a}$, et Ad, $A\delta$, hinc indè æquales $\frac{b}{2\sqrt{a}}$, junge Dd, $D\delta$ erunt illæ duæ Asymptoti. Ergo figura habet sex crura ad tres Asymptotos rectas jacentia. Q. E. D.

Coroll. 1. Si desit terminus bx^2, tres Asymptoti, evanescente triangulo $Dd\delta$, in uno eodemque puncto conveniunt.

Coroll. 2. Si figura Ovalem conjugatam habeat, ea semper continetur intrà triangulum, $D d \delta$; nam si consisteret extrà, duci poterat recta secans curvam in quatuor punctis, quod fieri nequit. Idem intellige de Nodo, Cuspide et puncto conjugato. Ut enim punctum est Ovalis infinite parva, sic Cuspis est Nodus infinite parvus.

Coroll. 3. Ergo si desit terminus $b x^2$, hoc est, si tres Asymptoti in uno eodemque puncto conveniunt, figura nunquam habet ovalem, nodum, cuspidem aut punctum conjugatum: quia (per *Coroll.* 1, 2.) evanescit triangulum intra quod semper consistit ovalis, nodus, cuspis vel punctum conjugatum.

Coroll. 4. Duc $\delta M O$ bisecantem $D d$, in M, item $O P$ Asymptoto $D d$ parallelam secantem curvam in P. Sitque abscissa $M O = z$, ordinata $O P = v$; et eâdem ratione, quâ existente $A B = x$, $B C = y$, prodit

$$x y^2 - e y = a x^3 + b x^2 + c x + d,$$

prodibit etiam

$$z v^2 - E v = A z^3 + B z^2 + C z + D.$$

Et si ducatur $d N Q$ bisecans $D \delta$ in N, et $Q R$ Asymptoto $D \delta$ parallela, curvam secans in R, et sit $N Q = s$, $R Q = t$, orietur $s t^2 - e t = \alpha s^3 + \beta s^2 + \gamma s + \delta$. Qui de hisce dubitat utatur calculo.

I 4

Coroll. 5. Unde si æquationis

$$xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

desit terminus bx^2, in æquationibus duabus reliquis deerunt termini respectivi Bz^2, βs^2. Et contrà, ut constat ex *Coroll.* 1.

Coroll. 6. Si desit terminus ey, Abscissa est diameter bisecans Ordinatas: et contrà, si AB sit Diameter, deest terminus ey. Simile intellige de abscissis MO, NQ earumque Ordinatis.

Coroll. 7. Si desit terminus ey, curva non decussat Asymptoton $d\delta$; nam existente x infinite parva erit $y = \pm\sqrt{\frac{d}{x}}$, adeoque (per *Coroll.* 3. *Prop.* 7.) crura jacent ad easdam Asymptoti $d\delta$ partes et in plagas oppositas feruntur: et inde (per *Coroll.* 4. *Prop.* 4.) tria intersectionis puncta abeunt in infinitum; adeoque nullum restabit punctum in quo curva decussare potest ejus Asymptoton. Et contrà, si curva non decusset Asymptoton, deest terminus ey et abscissa AB est diameter, atque crura jacent ad easdem Asymptoti $d\delta$ partes, in plagas oppositas lata. Simile intellige de Asymptotis duabus reliquis cum Abscissis δO, dQ.

Coroll. 8. Si sit $b^2 - 4ac = 4de\sqrt{a}$, curva non decussat Asymptoton Dd, adeo-

que (per *Coroll.* 7.) MO est diameter. Nam est

$$AB = x,\ BC = y,\ BE = x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}};$$

quod si curva secaret Asymptoton Dd, erit in illo casu $BE = BC$, id est

$y = x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}$. In æquatione pro y substitue hunc valorem, et invenies

$$x = \frac{4ad + 2be\sqrt{a}}{b^2 - 4ac - 4ae\sqrt{a}} = AL,$$

ubi LK, est Ordinata transiens per K punctum intersectionis. Jam sit

$$b^2 - 4ac - 4ae\sqrt{a} = 0,$$

vel $$b^2 - 4ac = 4ae\sqrt{a},$$

et erit AL infinite magna, adeoque punctum intersectionis nullibi erit. Similiter si F sit punctum in quo curva secat Asymptoton $D\delta$, et FH ordinata; erit

$AH = \frac{4ad - 2bc\sqrt{a}}{b^2 - 4ac + 4ae\sqrt{a}}$, unde si sit $b^2 - 4ac = -4ae\sqrt{a}$, curva non decussat Asymptoton $D\delta$, et est NQ diameter.

Coroll. 9. Ergo si neque terminus ey desit, neque sit $b^2 - 4ac = \pm 4ae\sqrt{a}$, curva nullam habebit diametrum; sin eorum alterutrum accidit, curva unicam habebit diametrum et tres, si utrumque. Sciendum enim est Ordi-

natas bisectas esse alicui Asymptoto parallelas, ut constat per conversum *Prop.* 5. ejusque *Scholion*; et diametrum semper bisecare Ordinatas in Asymptotis terminatas, quia curvæ coïncidit cum Asymptotis ad distantiam infinitam: adeoque Diametrum transire per intersectionem duarum Asymptoton necesse est.

Coroll. 10. Igitur hæc curva vel habet nullam, unam vel tres Diametros: duas enim solas habere nequit.

Coroll. 11. Curva quæ nullam habet diametrum, secat tres ejus Asymptotos, singulam in unico puncto.

Coroll. 12. Curva quæ unicam habet diametrum decussat duas Asymptotos, per quarum intersectionem transit illa diameter: at tertiam non secat.

Coroll. 13. Curva quæ tres habet diametros Asymptoton nullam omnino secabit.

Coroll. 14. Si $b^2 - 4ac - 4ae\sqrt{a}$ sit quantitas affirmativa, Asymptotos DE jacet inter curvam et Abscissam; sin negativa sit, curva jacet inter Asymptoton et Abscissam. Et si $b^2 - 4ac + 4ae\sqrt{a}$ sit affirmativa quantitas, Asymptotos De jacet inter curvam et Abscissam, sin negativa sit, curva jacet inter Asymptoton et Abscissam.

Coroll. 15. Si desit terminus ey, id est, si AB sit diameter, et sit $b^2 - 4ac$ quantitas affirmativa, curva continet Asymptotos Dd, $D\delta$ in suo sinu. At si quantitas illa sit negativa, Asymptoti jacent extrà crura adjacentia.

Coroll. 16. Si figura habet tres diametros, et sit d quantitas affirmativa, crura jacent extrà Asymptotos; sin minus intrà. Corollaria hæc tria ultima constant ex *Coroll.* 2. *Prop.* 6.

Coroll. 17. Si æquationis

$$xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

terminus ax^3 sit negativus, figura habebit duo tantum crura Hyperbolica ad ordinatam primam jacentia. Nam series $\pm x\sqrt{a} \pm \frac{b}{2\sqrt{a}} + \&c$ ex cujus possibilitate pendent reliqua quatuor crura cum earum Asymptotis erit impossibilis. Constat etiam hoc *Corollarium* ex *Exemplo tertio Scholii Prop.* 7.

Notandum est in hâc propositione ejusque Corollariis per diametrum semper intelligi diametrum quæ bisecat Ordinatas duarum dimensionum.

Postquam compertus est numerus crurum alicujus curvæ, ejus species enumerantur determinando quæ crura ductu continuo conjunguntur; ut et describendo Ovales, Nodos,

Cuspides et puncta conjugata si quæ sint. Hæc omnia ex propositionibus præcedentibus facillime perficiuntur.

Enumeratio Specierum curvæ quam designat æquatio $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Hyperbolæ novem sequuntur, sex cruribus, ad tres rectas triangulum capientes, jacentibus præditi; quæ diametro ad ordinatas duarum dimensionum destituuntur. *Vide figuras in Enumeratione* Newtonianâ *Linearum tertii ordinis.*

Si æquationis

$$xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

extrahatur radix y, invenietur

$$y = \frac{e}{2x} \pm \frac{\sqrt{(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2)}}{x},$$

patet ergo ordinatam possibilem esse, quando quantitas $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2$, vinculo quadratico inclusa, est affirmativa, et impossibilem quando negativa : vices autem possibilitatis et impossibilitatis innotescunt per *Exemp.* 3. *Prop.* 8. describendo Parabolam cujus abscissa est x et ordinata

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2.$$

Species I. *Fig.* 5, 7.

Si æquationis

$$a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + \tfrac{1}{4} e^2 = 0$$

radices omnes AP, $A\varpi$, $A\pi$, Ap sint reales ejusdem signi et inæquales, figura constat ex tribus Hyperbolis inscriptâ, circumscriptâ, et ambigenâ. Nam (per *Exemp.* 3. *Prop.* 8.) ordinata inter puncta P, ϖ vel π, p erecta est imaginaria, et realis erit ordinata alio quovis abscissæ puncto insistens. Erige ordinatas PT, $\varpi\tau$, $\pi\tau$, pt, et hæ tangent curvam in totidem punctis T, τ, τ, t: etenim in illo casu ordinatarum vel summa vel differentia evanescit, prout ad diversas vel easdem Abscissæ partes extenduntur. Unde puncta T, τ, τ, t, sunt limites possibilitatis et impossibilitatis, atque adeo intra medios limites τ, τ continetur Ovalis. Crura verò quæ jacent ad angulum D conjunguntur: quoniam ordinata inter p, π erecta non occurit curvæ. Sed et crura quæ jacent ad angulos d, δ etiam conjunguntur; aliter enim, si fieri potest, conjungantur, et duci poterit recta per Ovalem secans curvam in quatuor punctis, quod fieri nequit. Ex supradictis abunde patet quod crura semper jacent ad diversas Asymptoti partes; et quod Hyperbola Conica bisecat ordinatas duarum

TAB. I. dimensionum; ex quarum consideratione necessariò sequitur Hyperbolarum unam esse inscriptam, alteram circumscriptam, et tertiam ambigenam : quæ est Species prima.

Species II. *Fig.* 8, 9.

Si ex radicibus duæ maximæ Ap, $A\pi$, (*fig.* 8.) vel duæ minimæ AP, $A\varpi$ (*fig.* 9.) sint æquales, Ovalis tangit Hyperbolam circumscriptam, et tangendo evadit nodus, atque Hyperbola, nodata; adeoque figura constat ex tribus Hyperbolis inscriptâ, nodatâ et ambigenâ : quæ est Species secunda.

Species III. *Fig.* 10, 11.

Si radices tres maximæ (*fig.* 10.) vel tres minimæ (*fig.* 11.) inter se æquentur, nodus evadit infinite parvus, id est, cuspis, et figura constat ex Hyperbolis tribus inscriptâ, cuspidatâ et ambigenâ : quæ est Species tertia.

Notandum est crura Hyperbolæ nodatæ semper esse versus se invicem convexa; aliter enim duci poterat recta secans curvam in quatuor punctis. Idem intellige de cuspidatâ, siquidem cuspis nihil aliud est quam nodus infinite parvus.

Species IV. *Fig.* 12. TAB. I.

Si è radicibus duæ mediæ æquentur(*fig.* 12.) Ovalis, quæ in specie primâ obtinebat, evadit infinite parva, id est, punctum. Et figura constat ex Hyperbolis tribus inscriptâ, circumscriptâ et ambigenâ cum puncto conjugato : quæ est Species quarta.

Species V, VI. *Fig.* 12, 13, 14, 15.

Si è radicibus duæ mediæ sint impossibiles, et reliquæ duæ inæquales et ejusdem signi (nam contraria habere nequeunt) impossibile erit itidem curvam habere ovalem, nodum, cuspidem aut punctum conjugatum; adeoque figura erit pura constans ex Hyperbolis tribus inscriptâ, circumscriptâ et ambigenâ. Si hæ Hyperbolæ jaceant ad angulos trianguli $Dd\delta$, (*fig.* 12, 13.). Species est quinta; sin jaceant ad latera ejusdem (*fig.* 14, 15.). Species est sexta.

Species VII, VIII. *Fig.* 16, 17, 18, 19. TAB. II.

Si è radicibus duæ sint æquales, et alteræ duæ vel impossibiles (*fig.* 16, 18.) vel possibiles (*fig.* 17, 19.) cum signis quæ à signis æqualium radicum diversa sunt, quatuor crura in uno puncto conveniunt; scilicet Hyper-

TAB. II. bolæ quæ in speciebus quintâ et sexta erant circumscriptæ et ambigenæ nunc constituunt cruciformem. Adeoque figura constat ex inscriptâ et cruciformi. Quod si jaceat inscripta ad angulum trianguli $Dd\delta$ (*fig.* 16, 17.) Species est septima. At si jaceat ad latus (*fig.* 18, 19.) Species est octava.

Species. IX. *Fig.* 20, 21.

Si radices omnes sint impossibiles (*fig.* 20.) vel si omnes sint reales (*fig.* 21.) et earum duæ negativæ sint et alteræ duæ affirmativæ, Hyperbolæ quæ in speciebus septimâ et octavâ conjungebantur et constituebant cruciformem ab invicem iterum separantur; et figura constat ex Hyperbolis duabus Inscriptis in angulis Asymptotôn oppositis jacentibus, cum anguineâ circa tertiam Asymptoton flexâ: quæ est Species nona.

Si radices duæ æquentur et duæ reliquæ etiam æquentur, figura migrat in sectionem Conicam cum lineâ rectâ. Nam

$$\sqrt{(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \tfrac{1}{4}e^2)}$$

erit quantitas rationalis, et inde æquatio $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$ bipartitur in duas æquationes, quarum una designat Hyperbolam Conicam, altera rectam.

Hi sunt casus omnes possibiles radicum æ-

quationis

quationis $a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + \frac{1}{4} e^2$ propterea quod $\frac{1}{4} e^2$ terminus ultimus est affirmativus, quippe quadratum realis quantitatis. Ut vero hoc melius intelligatur, casûs unius impossibilitatem ostendam, cujus ad exemplum reliquorum impossibilitas facillime evincitur.

Si æquationis

$$a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + \frac{1}{4} e^2 = 0,$$

radices tres idem habeant signum, dico quartum diversum habere non posse.

Describatur Parabola æquatione

$$z = a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + \frac{1}{4} e^2$$

designata; quoniam æquationis

$$a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + \frac{1}{4} e^2 = 0$$

quatuor radices ponuntur reales, Abscissa secat curvam in quatuor punctis: ea sunto *A*, *B*, *C*, *D*. (*fig.* 12.) Jam si fieri possit, sit principium Abscissæ inter puncta *A*, *B* adeo ut radix *E A* sit negativa et reliquæ tres affirmativæ: sit *E F* Ordinata prima; et existente $x = 0$, erit $y = \frac{1}{4} e^2 = E F$: sed *E F* est quantitas negativa, ergo etiam $\frac{1}{4} e^2$ quantitas negativa, quod est absurdum. Similiter ostendetur quod principium Abscissæ jacere nequit inter puncta *C*, *D*, quoniam ordinatæ ad Abscissæ partem *C D* erectæ sunt omnes negativæ. Igitur constat propositum;

nam si tres radices eadem habent signa, et quarta diversum: principium Abscissæ vel erit inter puncta *C*, *D* vel *A*, *B*. Sed cum hoc fieri nequit, neque illud fieri potest.

Eodemque modo ostenditur, quod si æquationis $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2 = 0$ radices duæ sint impossibiles, reliquæ duæ idem signum habebunt.

Hyperbolæ quatuordecim cum sex cruribus ad tres Asymptotos triangulum capientes jacentibus, unicam habentes Diametrum ad Ordinatas duarum dimensionum.

Si desit terminus ey figura habet Diametrum ad ordinatas duarum dimensionum, scilicet Abscissam: et æquatio erit

$$xy^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

TAB. II. *Species* X, XI. *Fig.* 22.

Si æquationis $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ radices omnes sint reales, ejusdem et signi inæquales; figura constat ex tribus Hyperbolis ad tres angulos trianguli $Dd\delta$ jacentibus cum Ovali intra triangulum consistenti. Nam sint tres radices $A\tau$, $A\mathfrak{1}$, At, et erunt T, $\mathfrak{1}$, t, limites possibilitatis et impossibilitatis (per *Exemp.* 2. *Prop.* 8.) atque intra τ, t continetur Ovalis. Crura verò, quæ ad eosdem an-

gulos trianguli $D d \delta$ jacent, conjungi, eodem modo ostenditur, quo in specie primâ. Si Asymptoti $D d$, $D \delta$ jaceant intra crura (*fig.* 22.) curva constat ex tribus Hyperbolis, duabus inscriptis ad d, δ et circumscriptâ ad D: quæ est species decima. TAB. II.

Sin Asymptotos jaceant extra crura, figura constat ex tribus Hyperbolis, inscriptâ ad D, et ambigenis duabus ad d, δ: quæ est Species undecima.

Species XII. *Fig.* 23.

Si radices duæ maximæ $A t$, $A \tau$ æquentur, Ovalis tangit Hyperbolam circumscriptam, et tangendo evadit nodus, atque Hyperbola nodata; et figura constat ex Hyperbolis duabus inscriptis ad d, δ cum nodatâ ad D: quæ est Species decima secunda.

Species XIII. *Fig.* 24.

Si radices tres æquentur, nodus evadit cuspis, et curva constat ex Hyperbolis duabus inscriptis ad d, δ, et cuspidata ad D: quæ est Species decima tertia.

Species XIV, XV. *Fig.* 25, 26.

Si radices duæ minimæ æquentur, ovalis, quæ in speciebus 10ª, et 11ª, obtinebat eva-

TAB. II. dit punctum. Et figura vel constat ex Hyperbolis duabus inscriptis ad d, δ (*fig.* 29.) cum circumscriptâ ad D : quæ est decima quarta; vel constat ex Hyperbolis duabus ambigenis ad d, δ (*fig.* 26.) cum inscriptâ ad D : quæ est Species decima quinta.

Species XVI, XVII, XVIII, XIX.
Fig. 25, 26, 27, 28.

Si ex radicibus duæ sint impossibiles, puræ habebuntur tres Hyperbolæ sine Ovali, decussatione, cuspide vel puncto conjugato. Et hujus species sunt quatuor : nempe decima sexta (*fig.* 25.) si circumscripta jaceat ad D, decima septima (*fig.* 26.) si inscripta jaceat ad D; decima octava (*fig.* 27.) si circumscripta jaceat ad latus trianguli, et decima nona (*fig.* 28.) si inscripta jaceat ad latus trianguli.

Species XX, XXI. *Fig.* 30, 31.

Si radices sint æquales, et tertia est signi diversi, quatuor crura in Abscissâ concurrunt. Et figura constabit ex inscriptâ et cruciformi. Quod si inscripta (*fig.* 30.) jaceat ad angulum trianguli, Species est vigesima; sin jaceat inscripta (*fig.* 31.) ad latus trianguli, Species est vigesima prima.

Species XXII, XXIII. *Fig.* 31, 32. TAB. II.

Si radices duæ sint inæquales et tertia est signi diversi, crura quatuor quæ in speciebus duabus novissimis conjungebantur ab invicem segregantur. Et figura constabit ex Hyperbolis duabus inscriptis, in angulis Asymptoton oppositis jacentibus cum conchoide intermediâ. Si conchois (*fig.* 31.) jaceat ad easdem Asymptoti $d\delta$ partes cum triangulo $Dd\delta$, Species est vigesima secunda; sin jaceat ad diversas (*fig.* 32.) Species est vigesima tertia. Hi sunt casus omnes radicum æquationis

$$xy^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Hyperbolæ quatuor cum sex cruribus ad tres Asymptotos triangulum facientes jacentibus, quæ tres habent Diametros ad ordinatas duarum dimensionum.

Si in æquatione $xy^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sit $b^2 = 4ac$, figura habet tres Diametros ad ordinatas duarum dimensionum: et crura eandem Asymptoton adjacentia ad easdem ejus partes semper in plagas oppositas protensa jacent. Nunquam hæc figura decussat Asymptotos, adeoque semper constat ex tribus inscriptis Hyperbolis. Sequitur (per *Coroll* 9. *Prop.* 16.)

TAB. III.

Species XXIV. *Fig.* 33.

Si æquationis $ax^3 + bx^2 + \frac{b^2}{4a} x + d = 0$ (posito pro c ejus valore $\frac{b^2}{4a}$) radices tres sint reales, ejusdem signi et inæquales, figura constat ex Hyperbolis tribus inscriptis cum Ovali intra triangulum $D d \delta$: quæ est Species vigesima quarta.

Species XXV. *Fig.* 33.

Si radices duæ minimæ æquentur, Ovalis in punctum evanescet, et figura constat ex tribus Hyperbolis inscriptis cum puncto conjugato : quæ est Species vigesima quinta.

Species XXVI, XXVII. *Fig.* 33, 34.

Si radices duæ imaginariæ sint, figura constat ex tribus Hyperbolis inscriptis sine Ovali vel puncto conjugato. Quod si hæ Hyperbolæ jaceant ad angulos trianguli $D d \delta$ (*fig.* 33.) Species est vigesima sexta, sin jaceant (*fig.* 34.) ad latera ejusdem, Species est vigesima septima.

Hi sunt omnes casus radicum æquationis $ax^3 + bx^2 + \frac{b^2}{4a} x + d = 0$; nam impossibile

est duas ejus radices maximas, vel omnes inter se æquari. Impossibile itidem est duas radices esse ejusdem signi, et tertiam signi ab iis diversi. TAB. III.

Hyperbolæ novem cum sex cruribus jacentibus ad tres Asymptotos ad unum punctum convergentes.

Si æquationis

$$xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

desit terminus bx^2, tres Asymptoti (per *Coroll.* 1. *Prop.* 16.) in uno eodemque puncto conveniunt. Et in illo casu (per *Coroll.* 3. *Prop.* 16.) figura nunquam habet ovalem, nodum, cuspidem vel punctum conjugatum: Species ejus ergo omnes sunt puræ, et ex puris hactenus enumeratis facillime enumerantur, ut sequitur.

Vertuntur Species quinta et sexta in vigesimam octavam (*fig.* 36).

Septima et octava in vigesimam nonam (*fig.* 35.).

Nona in tricesimam (*fig.* 37.) quando anguinea transit per centrum, et in tricesimam primam (*fig.* 36.) ubi non transit per centrum *A*.

Hæ quatuor Species Diametrum non habent.

TAB. III. Vertuntur species decima sexta et decima octava (*fig.* 38.) in tricesimam secundam.

Species decima septima et decima nona (*fig.* 39.) in tricesimam tertiam.

Vigesima et vigesima prima (*fig.* 40.) in tricesimam quartam.

Vigesima secunda et vigesima tertia (*fig.* 41.) in tricesimam quintam.

Et hæ quatuor Species unicam habent Diametrum.

Ac denique vertitur Species vigesima sexta et vigesima septima (*fig.* 42.) in tricesimam sextam. Hæc figura habet tres Diametros.

Nulla hic oriri potest difficultas, modo consideremus specierum singularum duarum, in unam hic coalescentium, diversitatem antea debitam fuisse triangulo ab Asymptotis comprehenso, quod nunc in nihil evanuit.

Hyperbolæ sex cum duobus cruribus ad eandem Asymptoton jacentibus.

Si æquationis

$$xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

terminus ax^3 sit negativus, figura (per *Coroll.* 17. *Prop.* 16.) habebit duo tantum crura ad unicam Asymptoton jacentia: et hæc crura (per *Coroll.* 11. *Prop.* 16.) ad diversas Asymptoti partes in plagas oppositas extensa

jacebunt. In illo casu erit TAB. III.

$$y = \frac{\frac{1}{2}e \pm \sqrt{(-ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2)}}{x}$$

ubì constat ordinatam y fore possibilem quando quantitas $-ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2$ est affirmativa, et impossibilem quando negativa.

Species XXXVII. *Fig.* 43.

Si æquationis $ax^4 = bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2$ radices omnes sint reales inæquales, eæ sunto AP, $A\varpi$, $A\pi$, Ap; erige ordinatas PT, $\varpi\tau$, $\pi 1$, pt, et erunt T, τ, 1, t limites; et intra τ, t continetur Ovalis : adeoque figura constat ex ovali cum anguineâ circa Asymptoton flexâ : quæ est Species tricesima septima.

Species XXVIII. *Fig.* 44.

Si radices duæ mediæ AP, Ap æquentur, ovalis tangit anguineam, et inde figura constat ex Hyperbolâ unicâ nodatâ : quæ est species tricesima octava.

Species XXXIX. *Fig.* 45.

Si radices tres ejusdem signi sint æquales, nodus migrat in cuspidem, et figura constat ex unicâ cuspidatâ : quæ est Species tricesima nona.

TAB. III.

Species XL. *Fig.* 47.

Si è radicibus ejusdem signi duæ maximæ æquentur; ovalis quæ in specie 37ª obtinebat, in punctum minuetur: et figura constat ex puncto cum anguineâ circa ordinatam primam flexâ: quæ est Species quadragesima.

Species XLI, XLII. *Fig.* 46, 47.

Si è radicibus duæ sint impossibiles, manebit anguinea pura: quod si illa transit per centrum (*fig.* 47.) Species est quadragesima prima.

At si non transit per centrum (*fig.* 46.) Species est quadragesima secunda.

Hyperbolæ septem cum duobus cruribus ad eandem Asymptoton extensis, cum Diametro ad ordinatas duarum dimensionum.

Si desit terminus ey, Abscissa est Diameter, et (per *Coroll.* 7. *Prop.* 16.) crura ad easdem ordinatæ primæ partes jacentia in plagas contrarias in infinitum serpunt. Invenietur

$$y = \frac{\pm\sqrt{(-ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx)}}{x}:$$

adeoque omnes casus æquationis patescunt describendo parabolam æquatione $z = -ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ definitam.

TAB. IV.

Species XLIII. *Fig.* 48.

Si æquationis $a x^3 = b x^2 + c x + d$ radices sint omnes reales ejusdem signi et inæquales, figura constat ex conchoide cum ovali ad convexitatem ejus: quæ est Species quadragesima tertia.

Species XLIV. *Fig.* 49.

Si radices duæ sint inæquales, et ejusdem signi, et tertia contrarii, figura constat ex conchoide cum ovali ad concavitatem: quæ est Species quadragesima quarta.

Species XLV. *Fig.* 50.

Si radices omnes sint ejusdem signi, et duæ minimæ æquentur, figura constat ex Hyperbolâ nodatâ: quæ est Species quadragesima quinta.

Species XLVI. *Fig.* 51.

Si tres radices æquentur, nodus evadit cuspis, et figura evadit Cissois Veterum: quæ est Species quadragesima sexta.

Species LXVII. *Fig.* 53.

Si radices duæ maximæ æquentur et tertia sit ejusdem signi, figura constat ex conchoide cum puncto ad convexitatem: quæ est Species quadragesima septima.

TAB. IV. Si radices duæ æquentur et tertia sit signi contrarii, figura constat ex conchoide cum puncto ad concavitatem (*fig.* 52.). Quæ est Species quadragesima octava.

Species XLIX. *Fig.* 52, 53.

Si radices duæ sint impossibiles, figura constat ex conchoide solâ : quæ est Species quadragesima nona.

PROP. XVII. THEOR.

Æquatio $xy^2 - ey = * bx^2 + cx + d$, designat figuram habentem quatuor crura quorum duo sunt Hyperbolica ad ordinatam primam jacentia; et duo sunt Parabolica in eandem plagam extensa, quæ pro Asymptoto sortiuntur parabolam *Conicam*.

Sit $AB = x$, $BC = y$. (*fig.* 28.) Invenies

$$y = \frac{1}{2}\frac{e}{x} \pm \frac{\sqrt{(bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2)}}{x}:$$

reducatur pars irrationalis in seriem $\frac{e}{2x} + \frac{d}{e}$ &c eò citiùs convergentem quò minor est x; atque unus ordinatæ valor erit $-\frac{d}{e}$ &c. alter $\frac{e}{x} + \frac{d}{e}$ &c. valor ille primus indicat ordinatam primam secare curvam : et valor hic ul-

timus $\frac{e}{x} + \frac{d}{e}$ &c. (per *Coroll.* 2. *Prop.* 7.) indicat ordinatam primam $A\,d$ esse Asymptoton, habentem duo crura ad diversas ejus partes jacentia, in plagas oppositas progredientia. Evadat jam x utcunque magna, et etiam sine limite augebuntur ordinatæ y duo valores: quæ curva habet alia duo crura infinita: Quod si mutetur signum ipsius x, hoc est, si sumatur Abscissa ad alteras partes, terminus $b\,x^2$ evadet negativus; et indè augendo x ad illas partes ordinata tandem evadet imaginaria. Igitur curva habet quatuor tantùm crura infinita. Reducatur y in seriem $\pm\sqrt{b\,x} \pm \frac{c}{2\sqrt{b\,x}}$ &c. unde (per *Prop.* 6.) $\pm\sqrt{b\,x}$ est Ordinata Asymptoti quæ quidem est Parabola conica, axem habens $A\,B$, latus rectum b, et verticem A. Q. E. D.

Coroll. 1. Si terminus $c\,x$ sit affirmativus, parabola conica jacet intra crura hujus figuræ; sin negativus parabola conica figuræ crura in sinu suo complectitur: ut constat ex *Coroll.* 2. *Prop.* 6.

Coroll. 2. Parabola hæc conica numquam secat curvam in pluribus punctis quam in duobus. Occurrat ordinata $B\,C$ parabolæ E, et erit $B\,E = \pm\sqrt{b\,x}$, ideoque ubi Parabola

secat curvam evadit $y = \pm \sqrt{bx}$, coeuntibus punctis C, E: et $y^2 = bx$, unde $x = \frac{y^2}{b}$, quem valorem pro x in æquatione substitue, et invenietur $y = \frac{be \pm \sqrt{(b^2e^2 - 4bcd)}}{2c}$ puncta igitur intersectionis ad summum duo tantùm sunt, quum æquatio eadem determinans est duarum dimensionum.

Coroll. 3. Igitur Parabola vel secat figuram in duabus punctis vel in nullis; propterea quod æquatio quadratica vel habet duas radices possibiles vel nullas.

Coroll. 4. Si $4cd$ majus sit be^2, Parabola non secat curvam, quoniam æquatio

$$y = \frac{be \pm \sqrt{(b^2e^2 - 4bcd)}}{2c}$$

puncta intersectionis determinans, erit impossibilis. Nam quantitas vinculo quadratico inclusa est negativa; et in illo casu crura Parabolæ jacent intra crura figuræ.

Coroll. 5. Si $4ad$ æqualis sit be^2, Parabola tangit curvam. Nam sint F, K puncta intersectionis, FG, KH ordinatæ ab Abscissam; possunt hæ ordinatæ ad diversas vel easdem Abscissæ partes jacere: et si sit $4cd = be^2$ istarum rectarum evanescit differentia; adeoque

coeunt intersectionis puncta, et ex iis coeuntibus conflatur punctum contactûs.

Coroll. 6. Si parabola secet curvám in duobus punctis, jacent hæc puncta ad easdem vel diversas Abscissæ partes, prout terminus cx est affirmativus aut negativus : ut ex *Corollario* primo facilè colligitur.

Coroll. 7. Si desit terminus ey, Abscissa est diameter, et curva non decussat Asymptoton Ad, sed crura ad easdem ejus partes in plagas oppositas extensa jacebunt.

Coroll. 8. Et quando deest terminus ille ey, puncta intersectionis F, K in eâdem ordinatâ jacebunt, coeuntibus punctis G, H.

Coroll. 9. Et in illo casu Parabola secat curvam, vel non secat, prout terminus cx est negàtivus aut affirmativus : ut constat ex *Corollario* secundo.

Enumeratio Specierum curvæ quam designat æquatio $xy^2 - ey = * bx^2 + cx + d$.

Figuræ septem partim Hyperbolicæ, partim Parabolicæ, scilicet quæ habent duo crura Hyperbolica, et duo Parabolica.

Species L. *Fig.* 54.

Si æquationis $bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2 = 0$ extrahantur radices tres AP, $A\varpi$, $A\pi$, et

TAB. IV. ab earum extremis erigantur Ordinatæ totidem PT, $\varpi\tau$, $\pi 1$, hæ tangent curvam in punctis T, τ, 1, qui sunt limites. Nam si tres radices sint omnes reales ejusdem signi et inæquales, crura Hyperbolica et Parabolica ad easdem Abscissæ partes positæ conjunguntur, et intra limites π, 1, continetur Ovalis : quæ est Species quinquagesima.

Species LI. *Fig.* 55.

Si è tribus radicibus ejusdem signi duæ minores inter se æquentur, Ovalis accedet ad unam figurarum Hyperbolico-Parabolicarum Nodum efficiens : quæ est Species quinquagesima prima.

Species LII. *Fig.* 56.

Si tres radices æquentur, nodus migrabit in cuspidem; quæ est Species quinquagesima secunda.

Species. LIII. *Fig.* 57.

Si è tribus radicibus ejusdem signi, duæ majores æquentur, Ovalis evanescet in punctum conjugatum : quæ est Species quinquagesima tertia.

Species

Species LIV. *Fig.* 57, 58. TAB. IV.

Si duæ radices sint imaginariæ; manebunt duæ puræ figuræ: quæ est Species quinquagesima quarta.

Species LV. *Fig.* 59.

Si radices duæ æquentur, et tertia est signi contrarii; figura evadit cruciformis: quæ est Species quinquagesima quinta.

Species LVI. *Fig.* 60.

Si radices duæ sint inæquales, et tertia est signi contrarii; figura constat ex Angineâ circa Ordinatam primam flexâ, cum Parabolâ: quæ est Species quinquagesima sexta.

Figuræ quatuor Hyperbolo-Parabolicæ cum Diametro Abscissâ.

Species LVII. *Fig.* 61. TAB. V.

Si æquationis $bx^2 + cx + d = 0$ radices sint impossibiles, crura Parabolica junguntur cum Hyperbolicis ad easdem Abscissæ partes: Quæ est Species quinquagesima septima.

Species LVIII. *Fig.* 62.

Si radices duæ sint æquales et ejusdem signi, figura evadit cruciformis: quæ est Species quinquagesima octava.

TAB. V.

Species LIX. *Fig.* 63.

Si radices sint ejusdem signi et inæquales, figura constat ex conchoide cum Parabolâ ad easdem partes Ordinatæ primæ : quæ est Species quinquagesima nona.

Species LX. *Fig.* 64.

Si radices sint signi diversi, Conchois et parabola ad diversas ordinatæ primæ partes jacebunt : quæ est Species sexagesima.

PROP. XVIII. THEOR.

Vid. Fig. 65, 66, 67, 68.

Æquatio $xy^2 - ey = ** cx + d$ designat figuram habentem sex crura Hyperbolica ad tres Asymptotos, quarum duæ sunt Abscissæ parallelæ, jacentia.

Reducatur y in seriem $\frac{e}{x} + \frac{d}{e}$ &c. eo citiùs convergentem, quo minor est x : unde (per *Coroll.* 2. *Prop.* 7.) ordinata prima est Asymptotos habens duo crura ad diversas ejus partes jacentia, et in plagas oppositas progredientia. Abscissa x ad utrasque partes in infinitum augeri potest, et ordinata numquam evadet impossibilis. Reducatur y in seriem

eo citiùs convergentem quo major est x,

$$\pm\sqrt{c}+\frac{\pm d+e\sqrt{c}}{2x\sqrt{c}} \ \&c.$$

Unde (per *Prop.* 6.) $\pm\sqrt{c}$ est ordinata Asymptoti ad Abscissam x pertinens. Sume igitur in ordinatâ primâ duas rectas hinc inde æquales $\sqrt{c}$, et rectæ ductæ per earum extremitates Abscissæ parallelæ, erunt duæ Asymptoti.

Coroll. 1. Si $d+e\sqrt{c}$ sit quantitas affirmativa, Asymptotos dg jacet inter ejus crus et Abscissam; sin negativa contrarium accidit.

Coroll. 2. Crura adjacentia Asymptotos dg, $\delta\gamma$ semper jacent ad diversas earum partes: Nam si signum Abscissæ mutetur, quantitatis $d+e\sqrt{c}$ signum mutabitur.

Coroll. 3. Curva non decussat Asymptotos dg, $\delta\gamma$ (per *Coroll.* 6. *Prop.* 4.).

Coroll. 4. Eodem modo ostenditur, quo in *Coroll.* 1. quod si sit $d-e\sqrt{c}$ quantitas affirmativa, Asymptotos $\gamma\delta$ jacet inter crus et Abscissam.

Coroll. 5. Ergo si $d+e\sqrt{c}$, $d-e\sqrt{c}$ sint quantitates ejusdem signi, Asymptoton dg, $\delta\gamma$ extremitates unæ ad eandem plagam tendentes jacent extra crura, et reliquæ intrà.

Coroll. 6. Si $d+e\sqrt{c}$, $d-e\sqrt{c}$ sint signi

L 2

TAB. V. contrarii, Asymptoton dg, $\delta\gamma$ extremitates ad plagas oppositas ductæ jacebunt intrà crura, reliquæ extrà.

Coroll. 7. Crura adjacentia Asymptoton $d\delta$, jacent ad easdem vel diversas ejus partes, prout abest vel adest terminus ey.

Coroll. 8. Si desit terminus ey, extremitates unæ Asymptoton in eandem plagam extensæ jacent intrà crura, reliquæ extrà.

Coroll. 9. Si terminus cx sit negativus; figura habet duo tantùm crura ad ordinatæ primæ easdem vel contrarias partes jacentia, prout abest vel adest terminus ey.

Enumeratio Specierum curvæ quam designat æquatio $xy^2 - ey = cx + d$.

Species LXI. *Fig.* 65.

Si æquationis $cx^2 + dx + \frac{1}{4}e^2 = 0$, radices sint reales, eæ necessariò habebunt eadem signa, et erunt inæquales : atque figura constabit ex tribus Hyperbolis, Inscriptâ ad d, ambigenâ ad δ, cum tertiâ intra Asymptotos parallelas : quæ est Species sexagesima prima.

Species LXII, LXIII. *Fig.* 66, 67.

Si æquationis illius radices sint imaginariæ, habebitur Anguinea intra Asymptotos parallelas, cum duabus Inscriptis : si Anguinea tran-

sit per centrum (*fig.* 67.) Species est sexagesima secunda; si non transeat per centrum (*fig.* 66.) Species est sexagesima tertia. TAB. V.

Species LXIV. *Fig.* 68.

Si desit terminus ey, figura constat ex Hyperbolâ intra Asymptotos parallelas, cum duabus inscriptis : quæ est Species sexagesima quarta.

Species LXV, LXVI. *Fig.* 69, 70.

Si æquationis $xy^2 + ey = cx + d$, terminus cx sit negativus; figura constat ex Anguineâ pura : si Anguinea illa transit per centrum, Species est sexagesima quinta; at si non transit per centrum, Species est sexagesima sexta.

Species LXVII. *Fig.* 71.

Si desit terminus ey, æquatio

$$xy^2 = -cx + d,$$

designat conchoidem puram : quæ est Species sexagesima septima.

TAB. V.

PROP. XIX. THEOR.

Æquatio $xy^2 - ey = * * * + d$ *designat Figuram habentem quatuor crura.*

Vide fig. 72, ubi $AB = x$, $BC = y$, invenietur $y = \frac{\frac{1}{2}e \pm \sqrt{(dx + \frac{1}{4}e^2)}}{x}$, id est per methodum serierum, $y = \frac{x}{e} + \frac{d}{e} +$ &c. Unde Ordinata prima AG est Asymptotos habens duo crura adjacentia. Augeatur jam x perpetuò, et y non evadet impossibilis; quare curva habet alia duo crura: quod si mutetur signum ipsius x, evadet y tandem imaginaria; adeoque curva ad illas plagas in infinitum non pergit. Quoniam vero augendo x, y perpetuò diminuitur, patet Abscissam esse alteram Asymptoton habentem duo crura ad diversas ejus partes jacentia, in plagam eandem protensa. Q. E. D.

Coroll. Abscissa non secat curvam; nam (per *Coroll.* 4. *Prop.* 4.) tria intersectionis puncta abeunt in infinitum.

Species LXVIII. *Fig.* 72.

Si adsit terminus ey, figura constat ex duabus Hyperbolis, Inscriptâ et Ambigenâ: quæ est Species sexagesima octava.

Species LXIX. *Fig.* 73.

TAB. V.

At si desit terminus ey, figura constat ex duabus inscriptis in angulis Asymptotôn deinceps jacentibus: quæ est Species sexagesima nona.

PROP. XX. THEOR.

Æquatio $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *designat figuram habentem duo crura Hyperbolica ad Ordinatam primam jacentia, et duo Parabolica quæ pro Asymptoto habent Parabolam Conicam.*

Sit Abscissa $AB = x$, Ordinata $BC = y$. Est $y = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x}$, sit x infinitè parva, et erit $y = \frac{d}{x}$, igitur (per *Coroll.* 2. *Prop.* 16.) Ordinata prima habet duo crura ad diversas ejus partes jacentia, et in plagas oppositas progredientia. Augeatur jam x tam versùs dextram quam sinistram in infinitum, et valor ipsius y semper erit affirmativus, et etiam sine limite increscet. Sumatur

$$BE = ax^2 + bx + c,$$

eritque (per *Prop.* 6.) locus omnium E Asymptotos curvæ, quæ quidem est Parabola Conica. Q. E. D.

Coroll. 1. Hæc Figura nunquam decussat ejus Asymptoton $A\,G$. Nam tria intersectionis puncta abeunt in infinitum. Adeoque crura Hyperbolica et Parabolica ad easdem partes rectæ (*fig.* 73.) $A\,G$ jacentia semper copulantur : Et proinde hujus figuræ Species tantùm est unica, quæ est septuagesima.

Coroll. 2. Parabola Conica nunquam decussat hanc curvam; secet enim, si fieri possit, et erit $E\,C = 0$, adeoque etiam $d = 0$, quod fieri nequit.

Coroll. 3. Sit $A\,D = -\frac{b}{2\,a}$, ordinata $D\,F = \frac{4\,a\,c - b^2}{4\,a}$: Vertice F, Diametro $D\,F$, et latere recto $\frac{1}{a}$ descripta Parabola est Asymptotos curvæ.

PROP. XXI. THEOR.

Æquatio $y^2 = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ *designat figuram habentem duo crura Parabolica in oppositas plagas errantia.* Vide fig. 75.

Augeatur x in infinitum, et simul augebuntur ordinatæ y duo valores hinc inde æquales, ergo curva habet duo crura infinita. At si mutetur signum Abscissæ, terminus $a\,x^3$ evadet negativus : et proinde datur certus li-

mes, ultrà quem x in illas plagas non pergit. Reducendo y in seriem patebit crura esse Parabolica. Q. E. D. TAB. VI.

Enumeratio Specierum curvæ quam designat æquatio $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Species LXXI. *Fig.* 75, 76.

Si æquationis $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, radices omnes sint reales et inæquales, Parabola habet Ovalem ad verticem: quæ est Species septuagesima prima.

Species LXXII, LXXIII. *Fig.* 77, 78.

Si radices duæ æquentur, figura vel prodit Nodata (*fig.* 77.) quæ est Species septuagesima secunda; vel punctata (*fig.* 78.) quæ est Species septuagesima tertia.

Species LXXIV. *Fig.* 80.

Si tres radices æquentur, figura erit cuspidata, quæ est Species septuagesima quarta.

Estque hæc figura Asymptotos Parabolarum quam designat æquatio

$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Species LXXV. *Fig.* 78, 79.

Si radices duæ sint impossibiles, figura erit pura campaniformis, Speciem constituens septuagesimam quintam.

TAB. VI.

Species LXXVI. *Fig.* 81.

In quarto casu æquatio erat

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d:$$

quæ (per *Prop.* 8.) designat figuram habentem crura contraria, quæ *Cubica* Parabola dici solet Et sic Species omnino sunt septuaginta sex.

Lineæ tertii ordinis inter se formâ haud parum differunt, scilicet ut Ellipsis à circulo, vel Hyperbola æquilatera à reliquis.

Sed et aliquando vertices figurarum quas concavas descripsimus, formam cuspidis induunt: at cuspides istiusmodi non componuntur ex nodis infinitè parvis, nec unquam prodeunt admodùm acuti.

Determinatio Locorum Geometricorum.

Postquam Species omnes Linearum alicujus ordinis enumerantur, convenit ut dignoscatur Species quam constituit Linea particularis æquatione quâlibet propositâ denotata. Innumeræ enim æquationes, quoad formam multùm inter se discrepantes, eandem Lineam designare possunt. Lineæ quæ excurrunt in infinitum ex Asymptotis suis optimè determinantur; ovales verò ex Diametris.

Sit

$$y^2 + Axy + By + Cx^2 + Dx + E = 0$$

æquatio universalis ad coni sectiones. Hæc æquatio (per *Prop.* 10.) facillimè convertetur in hanc (*fig.* 12.) $y^2 = Ax^2 + Bx + C$. Et figura erit Hyperbola, Parabola aut Ellipsis prout terminus Ax^2 affirmativus est, nullus aut negativus.

In primo casu, quando figura est Hyperbola, sumendo Abscissam novam $= x + \frac{B}{2A}$ æquatio induet hanc formam $y^2 = Ax^2 + B$. Sit jam CB Abscissa $= x$, Ordinatà $BD = y$; et erit principium Abscissæ C centrum Hyperbolæ. Sume in ordinatâ BD; BE, Be hinc inde æquales x, et (per *Prop.* 6.) erunt CE, Ce duæ Asymptoti : ducatur CHN bisecans angulum Asymptoton, et etit CN axis. Sit H vertex figuræ, HGF ordinatim applicata ad diametrum CB, transiens per verticem. Concipiatur jam ordinata Dd motu parallelo ferri donec cum ordinatâ FH coeat; et in illo casu erit $dN = 0$, adeoque $BD = BN$. Ob datos trianguli CBN angulos, datur ratio CB ad BN, vel x ad BN. Sit ergo $x : BN :: C : D$, et erit $BN = \frac{Dx}{C}$; est verò $BD = y = \sqrt{(Ax^2 + B)}$. Pone ergo $(BD =) \sqrt{(Ax^2 + B)} = \frac{Dx}{C}$, et inve-

nies $x = CG = C\sqrt{\frac{B}{D^2 - AC^2}}$: sit ergo $CG : GH :: C : D$, et erit H vertex; atque inde si erigatur normalis HK Asymptoton secans in K; erunt CH, HK semi-axes conjugati. Datis vero CH, HK semi-axibus conjugatis facilè describitur Hyperbola. Q. E. F.

Si figura est Parabola, æquatio erit $y^2 = Ax + B$, vel sumendo principium Abscissæ in curvâ, $y^2 = Ax$. Sit Abscissa $AB = x$, (*fig.* 31.) ordinata BC vel $Bc = y$. Per A duc ALM perpendicularem ad Abscissam : secat ea curvam in L, ordinatam vero Cc in M. Sit $LDNK$ ordinata Abscissam in N secans. Moveatur ordinata BC motu parallelo donec coincidat cum LDK, et in illo casu erit $Mc = 0$, et proindè $BM = BC = y$. Ob datos trianguli ABM angulos datur ratio AB ad BM, vel x ad BM; sit igitur $x : BM :: C : D$, et erit $BM = \frac{Dx}{C}$. Pone ergo $\frac{Dx}{C} = y = \sqrt{Ax}$, et invenies $x = \frac{AC^2}{D^2} = AN$; datur ergo AN, et etiam dabitur NL quæ est ad AN ut D ad C. Datur ergo punctum L, et recta AL tam ma-

gnitudine quam positione. Biseca AL in E et sit HED normalis ad medium ejus punctum E, et erit HE axis. Sit vertex H, HGF ordinata ad Diametrum AB transiens per H, et in illo casu erit $y = GH$, est vero GH data quantitas : et erit $x = \frac{GH^2}{A} = AG$. Datur punctum G; per quod punctum si ducatur ordinata GH æqualis datæ rectæ DN, dabitur vertex H, et recta HE; est vero latus rectum principale æquale $\frac{AE^2}{HE}$, quod exinde dabitur. Datis jam axe HE, vertice H et latero recto $\frac{AE^2}{HE}$ describi potest Parabola. Q. E. F.

Si figura sit Ellipsis (*fig.* 32.), æquatio erit $y^2 = -Ax^2 + Bx + C$, quæ in hanc reducitur $y^2 = B - Ax^2$. Sit Abscissa $CB = x$, Ordinata BD vel $Bd = y$. Eritque principium Abscissæ centrum Figuræ. Secet curvam in L, et erit $CL = \sqrt{\frac{B}{A}}$: centro C radio CL describe circulum LE Ellipsin secantem in E: sitque EN ordinata; EP perpendicularis in Abscissam et dabitur specie triangulum NPE. Sit ergo $NE : EP :: C : D$, id est

$y : EP :: C : D$, undè

$EP = \frac{Dy}{C}$, $PN = \frac{C}{y} \times \sqrt{(C^2 - DD)}$.

Est verò per naturam curvæ $CN = \sqrt{\frac{B - y^2}{A}}$;

adeoque tota

$$CP = \frac{y}{C} \sqrt{(C^2 - D^2)} + \sqrt{\frac{B - y^2}{A}};$$

et est $CE = \sqrt{\frac{B}{A}}$ adeoque æquatio

$CE^2 = CP^2 + PE^2$ dabit y vel EN; et indè invenietur EN Abscissa correspondens; atque adeo datur punctum E, et per consequens recta CE positione. Duc rectas KC, CH bisecantes angulos ACE, ECL; et hi erunt axes, qui itaque positione dantur. Eorum verò magnitudo sic determinatur: Occurrat ordinata BD axi in N, et ducatur HGF. Ob datum specie triangulum CGH, datur ratio CG ad GH, sit ergo $CH : GH$ vel $CB : BN :: C : D$, et erit $BN = \frac{Dx}{C}$

Sed cum ordinata BD coïncidit cum GH, evadit BN æqualis $GH = y = \frac{Dx}{C}$; in æquatione substituendo illum ipsius valorem, erit $\frac{D^2 x^2}{C^2} = B - Ax^2$, undè

$$x = CG = C\sqrt{\frac{B}{D^2 + AC^2}};$$

adeoque dabitur ordinata GH; et punctum H, atque inde dabitur CH magnitudine. Et eodem modo invenire licet axem minorem.

Hæc tria Problemata soluta dare malui ex nudâ naturâ æquationum curvas definientium, quam per quasdam *Apollonii* Propositiones more veterum Geometrarum : Hoc modo enim melius innotescit analogia inter Loca secundi ordinis et Loca tertii et superiorum ordinum. Proprietates sectionum conicarum à Geometris hactenus traditæ sufficiunt ad determinanda loca quæ incidunt in sectiones coni : consimiles verò linearum superiorum ordinum proprietates traditas nondum habemus. Quâ ratione verò invenire licet quam Speciem constituit linea tertii ordinis æquatione quâlibet designata, ex propositione decimâ quintâ constare potest : quod per sequentia plenius adhuc constabit.

Exemplum primum.

Oporteat invenire quam speciem constituit Linea æquatione $y^3 + x^3 = a^3$ designata, ubì ordinatæ insistunt abscissâ ad angulos rectos. (*fig.* 33.)

Mutetur signum Abscissæ et æquatio evadet

$y^3 = x^3 + a^3$; et indè (per Theorema *Newtoni*) $y = x + \frac{a^3}{3x^2} +$ &c. Sit Abscissa *A B*, duc rectam *A C* per initium Abscissæ, quæ cum Abscissâ angulum semirectum contineat, et (per *Prop.* 6.) erit *A C* Asymptotos. Et quoniam unica tantum istiusmodi series obtineri potest, curva habet nisi duo crura infinita ad eandem Asymptoton jacentia, et (per *Coroll.* 2. *Prop.* 6.) hæc crura jacent ad easdem Asymptoti partes; et indè (per *Coroll.* 7. *Prop.* 16.) curva habet diametrum ad ordinatas duarum dimensionum. Sit *E* punctum quodlibet in curvâ, Ordinata $ED = y$, Abscissa $AD = x$; Ordinata nova Asymptoto parallela $FE = v$, Abscissa correspondens $AF = z$; erit

$$y = v\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ x = v\sqrt{\tfrac{1}{2}} - z.$$

In æquatione $y^3 = x^3 + a^3$, hosce valores substitue, et proveniet

$$\tfrac{1}{2}v^3\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}v^3\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{3}{2}zv^2 + 3z^2v\sqrt{\tfrac{1}{2}} - z^3 + a^3,$$

vel $3zv^2 - 6z^2v\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 2a^3 - 2z^3$. Unde (per *Prop.* 10.) $z\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ est ordinata Lineæ bisecantis ordinatas v ad curvam terminatas: Duc igitur rectam *A G* per principium Abscissæ Asymptoton secantem ad rectos angulos; et illa erit recta bisecans ordinatas. Occurrat ea ordinatæ *E F* in *G*; et sit Abscissa nova $AG = x$, ordinata correspondens $EG = y$.

Erit

Erit $z = x\sqrt{2}$, $v = y + x$; in æquatione $3zv^2 - 6z^2v\sqrt{\frac{1}{2}} = 2a^3 - 2z^3$ hosce valores pro z, v substitue, et orietur

$$3xy^2\sqrt{2} = 2a^3 - x^3\sqrt{2},$$

vel ponendo

$$a = c\sqrt{2}, \quad 3xy^2\sqrt{2} = 4c^3\sqrt{2} - x^3\sqrt{2},$$

et dividendo per $\sqrt{2}$, $3xy^2 = 4c^3 - x^3$: cumque æquatio hæc sit ejusdem formæ cum hâc $xy^2 - ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ubì deest terminus ey, et ax^3 est negativus, et prætereà æquationis $ax^3 + bx^2 + cx + d$ radices duæ sunt impossibiles, figura constituit Speciem quinquagesimam nonam. Q. E. I.

Exemplum secundum.

Oporteat invenire quam speciem constituit Linea æquatione $y^3 - 2xy^2 + x^2y - a^3 = 0$ designata, ubì ordinatæ insistunt abscissæ ad angulos rectos: hujus æquationis tres radices seu valores ipsius y reductæ in series eò citiùs convergentes quo major est abscissa x sunt

$$x + \frac{\sqrt{ax}}{a^2} - \frac{a^3}{2x^2} \text{ \&c.}$$

$$x - \frac{a^2}{\sqrt{ax}} - \frac{a^3}{2x^2} \text{ \&c.}$$

$$\frac{a^3}{x^2} + \frac{2a^6}{x^5} + \frac{7a^9}{x^8} + \text{\&c.}$$

Sit Abscissa $AB = x$, (*fig.* 34.) Ordinata rec-

M

tangula $Bc\ Cr$: in illâ ordinatâ sit $BD = AB$, junge AD, et (per *Prop.* 6.) erit illa Asymptotos, quæ pro duabus Asymptotis coeuntibus habenda est; siquidem duo termini priorum serierum coincidunt: undè hæc Linea vel constituit speciem sexagesimam octavam vel sexagesimam nonam, nam hæ duæ species solæ sunt Linearum tertii ordinis quæ habent Asymptotos duas coincidentes. Series tertia $\frac{a^3}{x^2} + \frac{2a^6}{x^5} + \frac{7a^9}{x^8} +$ &c. indicat abscissam esse Asymptoton habentem duo crura ad oppositas plagas protensa et ad easdem ejus partes jacentia; quoniam, mutando signum abscissæ, terminus $\frac{a^3}{x^2}$ manet affirmativus. Et quoniam in extremitate Asymptoti AD ad distantiam infinitam sitâ jacet punctum curvæ duplex; Asymptotos illa habet crura sua ad diversas ejus partes jacentia, et in plagas easdem protensa. Unde facilè videre est hanc curvam constituere Speciem sexagesimam nonam: Habetque Asymptoton AD pro Diametro ad ordinatas duarum dimensionum, quæ parallelæ sunt Asymptoto AB. Q. E. I.

FINIS.

INVENTIO LINEÆ CELERRIMI DESCENSUS

in quacunque hypothesi gravitatis.

PROBLEMA.

Invenire Lineam celerrimi descensûs, datâ lege vis Centripetæ.

SIT *C* centrum virium, (*fig.* 35.) *ADFH* linea quæsita, *A* punctum de quo corpus cadere debet, *B*, *D*, *E* tria puncta, quorum distantiæ sunt quam minimæ; junge *CB*, *CD*, *CE*: centro *C* et radiis *CB*, *CD*, describe circulos *BO*, *DP*, quorum hic secet *CN* (axem curvæ) et *CE* in *P*, *Q* respectivè: ille verò rectas *CD*, *CE*, in *R*, *S*; axem verò in *O*.

Sit *MLKG* linea cujus Ordinatæ *NM*, *OL*, *PK*, *FG*, insistentes Abscissâ *CN* normaliter proportionales sunt vi centripetæ in punctis *N*, *O*, *P*, *F*, respectivè. Cadat jam corpus à puncto *N*, versùs centrum vi solâ centripetâ agitatum, et (per *Prop.* 39. *Lib.* 1. *Princip. Newtoni*) ejus velocitas in

M 2

puncto quovis *D* erit areæ *NOLM* latus quadratum.

Jaceant puncta *A*, *N* in circumferentiâ circuli cujus centrum *C*, et velocitates corporum in curvâ *AB* et recta *NC* motorum in omnibus æqualibus à centro *C* distantiis erunt æquales. Nam (per Prop. 40. Lib. 1. *Newtoni*) si eorum velocitates in aliquâ æquali altitudine sint æquales, in omni æquali altitudine æquales erunt: at corporum istorum velocitates in punctis *A*, *N*, erant æquales, quippe nullæ; ergo et in omnibus distantiis æqualibus æquales erunt. Igitur velocitas corporis in curvâ *ABF* moti, per Areæ curvilineæ *MLG* latus quadratum rite representabitur: scilicet velocitas in *B* est ut $\sqrt{NOLM}$, velocitas in *D* est ut $\sqrt{NPKM}$.

Supponamus jam tria puncta *C*, *B*, *E* esse data, et opporteat invenire *D*, ex cujus inventione dabitur relatio quam habet *DR* ad *RB*, et exinde determinabitur curva. Dantur igitur *CE*, *CB*. Fluat *CE* uniformiter, id est, sit $EQ = DR$; atque erit *CD* media arithmetica inter datas *CB* et *CE*, et proinde dabitur. Ex datis vero *CB*, *CD*, id est *CO*, *CP*, dantur areæ *NOLM*, *NPKM*; adeoque dantur velocitates corporis ad puncta *B*, *D*. Velocitas, quâ percurritur *BD* ea est quam

corpus habuit in B; et tempus quo eadem percurritur est directè ut longitudo et reciprocè ut celeritas, hoc est ut $\frac{BD}{\sqrt{NOLM}}$. Similiter tempus quo percurritur DE est ut $\frac{DE}{\sqrt{NPKM}}$; et indè tempus quo percurritur BE est ut

$$\frac{BD}{\sqrt{NOLM}} + \frac{DE}{\sqrt{NPKM}}:$$

sed quia tempus quo tota curva percurritur supponitur brevissimum, erit tempus per quamlibet ejus partem etiam brevissimum. Et proindè fluxio quantitatis huic tempori proportionalis æqualis nihilo.

Hisce præmissis, sit $CD = CP = c$, $DR = PO = x$, $BR = y$, $DQ = z$, erit $BD = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $DE = \sqrt{(x^2 + z^2)}$: hisce valoribus pro BD, DE substitutis, erit

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{NOLM}} + \sqrt{\frac{x^2 + z^2}{NPKM}}$$

quantitas tempori proportionalis; adeoque ejus fluxio $= o$, hoc est

$$\frac{y\dot{y}}{\sqrt{(x^2+y^2)}\sqrt{NOLM}} + \frac{z\dot{z}}{\sqrt{(x^2+z^2)}\sqrt{NPKM}} = o;$$

nam x et areæ $NOLM$, $NPKM$ sunt

quantitates non fluentes. Ob data tria puncta C, B, E, datur BS (normalis à vertice trianguli CBE in basin CE demissa)

$$= BR + RS = BR + DQ = y + z,$$

adeoque $y + z$ est data quantitas, et ejus fluxio $\dot{y} + \dot{z} = o$, vel $\dot{z} = - \dot{y}$. In æquatione

$$\frac{\dot{y}\ddot{y}}{\sqrt{(x^2+y^2)}\sqrt{NOLM}} = \frac{-\dot{z}\ddot{z}}{\sqrt{(x^2+z^2)}\sqrt{NPKM}}$$

pro $\dot{z}$ pone ejus valorem $-\dot{y}$ et divide æquationem per $\dot{y}$ atque erit

$$\frac{\ddot{z}}{\sqrt{(x^2+z^2)}\sqrt{NPKM}} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{(x^2+y^2)}\sqrt{NOLM}}.$$

Cumque hoc universaliter in omnibus curvæ punctis obtineat, patet esse

$\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}\sqrt{NOLM}}$ datam quantitatem, vel $\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}\sqrt{NOLM}} = \frac{1}{A}$ (ubi A est data quantitas) et

$$Ay = \sqrt{(x^2+y^2)}\sqrt{NOLM}:$$

quæ æquatio determinat curvam. Q. E. I.

Coroll. 1. Est $A^2 = NFGM$; nam cum rec-

ta CB vel x coincidit cum CF, ea est normalis in curvam et $\dot{x} = 0$, atque area $NOLM$ evadit = areæ $NFGM$. In æquatione igitur $A\dot{y} = \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}\sqrt{NOLM}$ evanescat $\dot{x}$ et sit $NOLM = NFGM$, atque erit $A\dot{y} = \sqrt{\dot{y}^2}\sqrt{NFGM}$, id est, $A\dot{y} = \dot{y}\sqrt{NFGM}$ et dividendo per $\dot{y}$, $A = \sqrt{NFGM}$. Q. E. D.

Coroll. 2. $BD : BR$ ut velocitas maxima quam corpus in motu per curvam AF acquirit ad ejus velocitatem in puncto B. Nam est $A\dot{y} = \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}\sqrt{NOLM}$, vel $\sqrt{NFGM} \times \dot{y} = \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}\sqrt{NOLM}$, adeoque $BD : BR :: \sqrt{NFGM} : \sqrt{NOLM}$; hoc est, ut velocitas maxima ad velocitatem in puncto B.

Coroll. 3. $BR : RD :: \sqrt{NOLM} : \sqrt{FOLG}$.

Coroll. 4. Si sint A, H, puncta curvæ altissima, et ducantur CA, CH, hæ tangent curvam in punctis A, H.

Coroll. 5. Igitur in nullâ hypothesi gravitatis recta linea est via celerrimi descensûs; præterquam ubi corpus descendens directè tendit ad centrum.

Coroll. 6. Sit BT longitudinis cujusvis, et $BT : TU :: \sqrt{FOLG} : \sqrt{NOLM}$: sit

M 4

verò TU in TB normalis, junge BU, et illa tanget curvam in puncto B. Nam $DR : BR : \sqrt{FOLG} : \sqrt{NOLM}$, ergo $DR : BR :: BT : TU$; et proinde BU tangit curvam ad punctum B. Q. E. D.

Proprietates hucusque traditæ sunt generales, Lineæ celerrimi descensûs in omni hypothesi gravitatis universaliter competentes. Descendamus jam ad casus particulares.

Exemplum primum.

Supponamus vim centripetam esse uniformem, et agere in parallelis: quo in casu punctum C abit in infinitum (*fig.* 36.), existentibus CF, CD, CB parallelis. Peripheriæ AN, BO, DP et curva MG migrant in rectas, et area $NOLM$ in rectangulum, atque area $NOLM$ ad aream $NFGM$ ut NO ad NF et inde $RD : BR :: \sqrt{NF} : \sqrt{NO}$. Supra diametrum NF describe circulum NXF secantem ordinatam BO in X; junge NX, FX, et BU sit tangens ad B. Propter similia triangula NXF, NXO, FXO, $NF : NX :: NX : NO$. Ergo $\sqrt{NF} : \sqrt{NO} :: NF : NX$, et $NF : NX :: FX : XO$. Undè $DB : BR :: FX : XO$. Duc tangentem BU, et erit $BD : BR :: BU : BO$ adeoque $BU : BO :: XF : XO$. Ergo tangens BU semper

parallela est chordæ XF quæ est notissima proprietas cycloidis vulgaris.

Exemplum secundum.

Sit vis centripeta ut distantia à centro, et curva MLG (*fig.* 37.) migrabit in rectam transeuntem per centrum C. Sint anguli KCN, kCN semirecti $BR : DR :: \sqrt{NOLM} : \sqrt{FOLG}$. Jam sit $CF = a$, $CO = x$, $CN = r$, et erit area $NOLM = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{2}x^2$; $FOLG = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2$, undè $x : y :: \sqrt{(x^2 - a^2)} : \sqrt{(r^2 - x^2)}$. Describatur hyperbola FTr, vertice F et Asymptotis CK, Ck. Occurrat OL hyperbolæ in T, et circulo in Q: atque erit per hujus hyperbolæ et circuli naturam $OT = \sqrt{(x^2 - a^2)}$; $OQ = \sqrt{(r^2 - x^2)}$. Ergo $DR : BR :: OT : OQ$.

Hujus curvæ rectificatio per quadraturam hyperbolæ.

Patet $BD : DR :: FS : OT$. Hoc est incrementum curvæ ad incrementum axis OP, ut data recta FS ad Hyperbolæ ordinatam respectivam OT. Erit igitur componendo, ut omnes BD ad omnes OP ita totidem FS ad totidem ordinatas hyperbolæ. Hoc est ut curva AF ad axem ejus NF, ita rectangulum $NFSr$ ad aream hyperbolicam $NFTr$.

Etenim area illa $NFTr$ est summa ordinatarum OT.

Erit etiam ut AB ad NO ita $Nr \times OF$ ad aream OFT.

Hujus curvæ quadratura per quadraturas hyperbolæ et circuli.

Fluxio areæ, scilicet triangulum

$$CBD = \tfrac{1}{2} CB \times BR = \tfrac{1}{2} x \times \dot{y} = \tfrac{1}{2} \dot{x} x \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{x^2 - a^2}}.$$

Undè $CBD : \tfrac{1}{2} x \dot{x} :: \sqrt{(r^2 - x^2)} : \sqrt{(x^2 - a^2)}$; est verò CBD fluxio areæ CFB, et $\tfrac{1}{2} x \dot{x}$ fluxio quantitatis $\tfrac{1}{4} x^2$: ergo ut area CFB ad $\tfrac{1}{4} x^2$ ita omnes $\sqrt{(r^2 - x^2)}$ ad omnes $\sqrt{(x^2 - a^2)}$; hoc est $CFB : \tfrac{1}{2} x^2 ::$ area $FOQS$: aream FOT. Coincidat jam CB cum CF et evanescet area CFB, at evadet $\tfrac{1}{4} x^2 = \tfrac{1}{4} CF^2 = \tfrac{1}{4} a^2$ igitur statim apparet $\tfrac{1}{4} x^2$ fluentem quantitatis $\tfrac{1}{2} x \dot{x}$ minui debere quantitate $\tfrac{1}{4} a^2$, &c. proindè erit verè $CFB : \tfrac{1}{4} x^2 - \tfrac{1}{4} a^2 :: FOQS : FOT$, et area $ABC : \tfrac{1}{4} x^2 - \tfrac{1}{4} a^2 :: NOQ : NOTr$; atque area tota $CFA : \tfrac{1}{4} r^2 - \tfrac{1}{4} a^2 :: NSF : NrF$.

Exemplum tertium.

Sit vis centripeta reciprocè ut quadratum distantiæ à centro; et erit ordinata $OL = \frac{1}{x}$.

(*fig.* 38.) adeoque per notas quadrandi methodos

$$FOLG = \frac{1}{a} - \frac{1}{x},\ NOLM = \frac{1}{x} - \frac{1}{r};$$

et indè

$$BR^2 : RD^2 :: \frac{1}{x} - \frac{1}{r} : \frac{1}{a} - \frac{1}{x} :: \dot{y}^2 : \dot{x}^2,$$

vel quod idem est $\dot{x}^2 : \dot{y}^2 :: rx - ra : ra - ax$ et $\dot{x} : \dot{y} :: \sqrt{(rx - ra)} : \sqrt{(ra - ax)}$. Igitur latere recto r, axe FN, vertice F describe parabolam FS; item latere recto a, axe NF, vertice N describe parabolam NQ: occurrat ordinata OL parabolis hisce in Q, S; et erit $\dot{x} : \dot{y}$ vel $DR : BR :: OS : OQ$. Nam est $OS = \sqrt{(rx - ra)}$, et $OQ = \sqrt{(ra - ax)}$.

Hujus curvæ rectificatio.

Quoniam $\dot{x}^2 : \dot{y}^2 :: rx - ra : ra - ax$, erit $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 : \dot{x}^2 :: rx - ax : rx - ra$; et indè $\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} : \dot{x} :: \sqrt{(rx - ax)} : \sqrt{(rx - ra)} :: BD : DR$, hoc est, ut fluxio curvæ ad fluxionem abscissæ: et componendo erit ut summa omnium $\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}$ ad omnes $\dot{x}$, ita omnes $\sqrt{(rx - ax)}$ ad tot $\sqrt{(rx - ra)}$,

hoc est, $BF : FO :: x\sqrt{(rx - ax)} - a\sqrt{(ar - a^2)} : (x - a)\sqrt{(rx - ra)}$ [nam $x\sqrt{(rx - ax)}$ fluens fluxionis $\dot{x}\sqrt{(rx - ax)}$ minuenda est quantitate $a\sqrt{(ar - a^2)}$.]

Curva hæc perfectè quadrabilis est, nam $\dot{x} : \dot{y} :: \sqrt{(rx - ra)} : \sqrt{(ra - ax)}$, ergo $x\dot{x} : x\dot{y} :: \sqrt{(rx - ra)} : \sqrt{(ra - ax)}$; hoc est, $x\dot{x} : 2\dot{CBD}$ vel $\frac{1}{2}x\dot{x} : \dot{CBD} :: \sqrt{(rx - ra)} : \sqrt{(ra - ax)}$. Et sumendo summas omnium erit $\frac{1}{4}x^2 : CFB :: (x - a)\sqrt{(rx - ra)} : ra\sqrt{(ra - a^2)} - (r - x)\sqrt{(ra - ax)}$.

Et erit tota area CFA [comprehensa rectis CF, CA et curvâ AF] ad $\frac{1}{4}CN^2$ ut $\sqrt{(CN^2 - CN \times CF)}$ ad $\sqrt{(CN \times CF - CF^2)}$.

Hæ sunt tres insigniores hypotheses gravitatis, etenim si praxin spectemus, tutò supponi potest uniformis, et agere in parallelis, at in rigore geometrico, hypotheses duæ ultimæ in rerum naturâ locum verè habent. Nam in terræ cavernis gravitas est ut distantiæ corporis à centro terræ, et in turrium vel montium cacuminibus ea est reciprocè in duplicatâ ratione distantiæ, ut constat ex principiis *Newtoni*.

Datâ lineâ celerrimi descensûs, invenire legem vis centripetæ.

Æquatio definiens curvam AFH (*fig.* 35.) est $A\dot{y} = \sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}\ \sqrt{NOLM}$, ubì $CO = CB = x$, $DR = OP = \dot{x}$, $BR = \dot{y}$, $NFGM = A^2$. Jam area indeterminata $NOLM$ dicatur z^2, et erit $A\dot{y} = z\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}$, et indè $z^2 = \dfrac{A^2\dot{y}^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = NOLM$. Hujus æquationis capiatur fluxio, et erit $z\dot{z} = \dfrac{A^2\ \dot{x}^2\ \dot{y}\ \ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2}$ $= \frac{1}{2}POLK = \frac{1}{2}PO \times LO = \frac{1}{2}\dot{x} \times OL$. Undè dividendo per $\dot{x}$ habebimus ordinatam $OL = \dfrac{2A^2\dot{x}\dot{y}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2}$ vel $OL = \dfrac{A^2\dot{x}\dot{y}\ddot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2}$; ex datâ verò ordinatâ OL ad Abscissam x pertinente, dabitur curva MLG. Q. E. I.

Methodus disponendi quotcunque Sphæras in Fornicem; et indè demonstratur Proprietas præcipua Curvæ Catenariæ.

PROBLEMA.

Datas quotcunque Sphæras æquales in Fornicem ita disponere ut gravitate suâ se mutuò sustineant.

Sphæræ altissimæ centrum sit A, (*fig.* 39.) duarum verò huic contiguarum centra sint B, b: Duc DC secantem AB in C ipsi Ab parallelam: sintque radii AD, BG horizonti perpendiculares. Junge DG et in eâ producta sit $GF = AC$: ducatur BF in quâ sit $BE = BA$; atque erit E centrum sphæræ proximæ. Sit radius ER ad horizontem perpendicularis, junge GR, et in eâ producta sit $RK = BF$; ducatur EK, in quâ sit $EH = EB$; atque erit H centrum proximæ Sphæræ. Sit radius HL ad horizontem perpendicularis, junge RL et in eâ producta sit $LN = KE$. Ducatur HN, in quâ sit $HM = HE$ atque erit M centrum proximæ. Et sic proceditur in infinitum. Q. E. I.

Demonstratio.

Omnes hæ Sphæræ triplici potentiâ urgentur: et constat ex *Mechanicâ*, quod tres po-

tentiæ in æquilibrio consistentes eam ad se invicem rationem habent, quam tres rectæ potentiarum directionibus respectivè parallelæ et ad ipsarum intersectiones mutas terminatæ. Sphæra *AD* urgetur gravitate ab *A* versùs *D* tendente, et actione sphærarum contiguarum in rectis *AB*, *Ab*. Adeoque si radius *AD* exponat gravitatem Sphæræ absolutam, *AC* exponet vim quâ Sphæra *AD* urget Sphæram *BG* à *B* versùs *E*. Item *BF* exponet vim quâ Sphæra *ER* urget Sphæram *HL*, *EK* vim quâ Sphæra *HL* urget Sphæram sequentem. Et sic in infinitum. Vis *BF* resolvitur in vires *BG*, *GF* : id est, *BG*, *AC* : et iisdem æquipollet. Est verò *BG* vis gravitatis globi et *AC* vis quâ Sphæra *AD* urget Sphæram *BG* : et hæ duæ vires componunt omne pondus sustinendum à Sphærâ *ER*; scilicet unaquæque Sphæra sustinere debet omne pondus quod sustinet proximè superior Sphæra unà cum ipsius gravitate absolutâ. Et vis *EK* æquipollet viribus *ER*, *RK* vel *ER*, *BF* id est vi gravitatis Sphæræ *ER* et omni pondere quam eadem sustinet. Atque sic pergendo in infinitum, videbis ubique Sphærarum situm ita esse comparatum, ut earum quælibet sustinere potest omne pondus quod sustinet Sphæra immediatè superior, unà cum ipsius gra-

vitate absolutâ : adeoque hæ Sphæræ erunt *in* æquilibrio, et vi gravitatis sese sustinebunt.

Theorema.

Sint M et H centra duarum Sphærarum contiguarum ; duc Hd, Md; hanc horizonti parallelam, illam vero eidem normalem. Dico semper esse Md ad dH ut data quædam recta ad summam diametrorum Sphærarum omnium quam sustinet Sphæra cujus centrum M.

A centris Sphærarum B, E, H, M, &c. in radios productos (si opus est) AD, BG, ER, HL, &c. demitte normales BT, EW, HY, Md, &c. In eosdem radios sint etiam perpendiculares CS, FX, KZ, NQ, &c. Patet ex constructione esse

$$CS = FX = KZ = NQ$$

adeoque est NQ data recta, quæque ex angulo BAD assumpto ad libitum determinatur. Ex constructione etiam patet esse $AS = \frac{1}{2} AD = GX$, $RY = \frac{3}{2} AD$ et $EZ = \frac{5}{2} AD$, $HQ = \frac{7}{2} AD$, &c. Et est Md ad dH ut NQ ad QH, hoc est, ut data recta ad $\frac{7}{2} AD$ vel ut $2\,NQ$ ad $7\,AD$, est vero $7\,AD (= AB + BE + EH + HM)$ summa diametrorum omnium Sphærarum quas sustinet Sphæra, cujus centrum M. Constat ergo Theorema. Q. E. D.

Supponamus

Supponamus filum tenue transire per centra omnium Sphærarum, cujus extremitates fixæ sunt in punctis M, P; et tum Sphæras deorsum converti; atque illæ liberè pendentes situm priorem inter se retinebunt. Nam potentiarum solummodo directiones, non magnitudines mutantur.

Augeatur numerus Sphærarum et minuantur earum Diametri in infinitum, et filum illud evadet curva *Catenaria*; et Md erit incrementum Ordinatæ, dH incrementum abscissæ: et summa diametrorum Sphærarum quas sustinet Sphæra cujus centrum M, erit longitudo curvæ inter verticem A et punctum M interc. epta, et quantitas data NQ evadet radius curvaturæ in vertice.

Undè catenæ proprietas hæc est; ut incrementum ordinatæ ad incrementum abscissæ, ita duplus radius curvaturæ in vertice ad longitudinem curvæ inter verticem et ordinatam illam interceptæ. Q. E. D.

Et similiter invenies Figuram fornicis vel catenæ in quâcunque hypothesi gravitatis, quamvis Sphæræ non sint æquales, vel etiam si essent Sphæroides.

Solutio Problematis à Leibnitio *nuper propositi.*

PROBLEMA.

Invenire Lineam quæ ad angulos rectos secabit omnes Hyperbolas Conicas iisdem verticibus et circa eundem axem descriptas.

Sit recta $PGDB$ axis, F centrum et G, D vertices Hyperbolarum, A punctum in axe quodlibet per quod transire supponitur curva quæsita $ACZQ$; quam tangat CH in C, cui normalis sit CE; quæ propterea tanget Hyperbolam in C quæ axem habet GD, vertices G, D et transit per punctum C. Unde (per naturam Hyperbolæ) est BF ad FD sicut FD ad FE.

Hisce præmissis sit Abscissa $AB = x$, ordinata $BC = y$, $AF = a$, $DF = c$. Eritque $BF = a - x$: quibus valoribus in priori analogiâ substitutis, est

$$a - x : c :: c : EF = \frac{c^2}{a - x} \text{ et}$$

$$BF - EF = a - x - \frac{c^2}{a - x} = \frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x} = EB.$$

Jam in curvâ AC, ut ordinata BC ad subtangentem BH ita est fluxio ordinatæ ad fluxionem Abscissæ: hoc est $BC : BH :: \dot{y} : \dot{x}$

propter verò similia triangula EBC, CBH, est $EB : BC :: BC : BH$, undè ex æquo $EB : BC :: \dot{y} : \dot{x}$ ubi si pro EB et BC substituantur earum valores, proveniet

$$\frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x} : y :: \dot{y} : \dot{x}.$$

Ergo $$y\dot{y} = \dot{x} \times \frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x}$$

est æquatio curvam quæsitam AC definiens. Q. E. I.

Patet hanc æquationem à fluxionibus liberari non posse, nam quantitas

$$\dot{x} \times \frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x}$$

est fluxio areæ hyperbolæ, cujus ordinata est

$$\frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x}$$

pertinens ad abscissam x. Hæc autem Hyperbola Asymptotos habet SFT, et XFY, quarum illa est axi GD normalis, hæc vero cum illa continet angulos SFX, YFT semirectos; et jacet Hyperbola in angulis illis deinceps, per Hyperbolarum vertices G, D transiens.

Hac Hyperbolâ semel descriptâ, ut in Schemate, curvam sic construo. Ducatur ordinata prima AK secans Hyperbolam in K, et occurrat ordinata quævis alia BC eidem in L;

atque erit $\dot{x} \times \frac{a^2 - c^2 - 2ax + x^2}{a - x}$ vel $y\dot{y}$ fluxio areæ Hyperbolicæ $AKLB$; undè regrediendo ad fluentes, erit $\frac{1}{2}y^2 =$ areæ $AKLB$, et $y^2 = 2AKLB$, atque $y = \pm\sqrt{2AKLB} = BC$ vel Bc, qui duo valores propter contraria signa ad partes Abscissæ contrarias jacent.

1. Patet hanc curvam ad A incipere, ubi incipit area AL, nec ultra punctum A versus H extendi. Nam si area $AKLB$ pro affirmativâ habeatur, omnis area alia quæ ad alias Abscissæ vel Ordinatæ partes jacet erit negativa; et area negativa, quæ latus quadratum non admittit, demonstrat ordinatæ impossibilitatem.

2. Ordinata maxima transit per punctum D. Nam area $AKLB$; (cujus radici quadratæ æqualis est ordinata) continuo crescit dum progreditur punctum B ab A versus D postquam verò ordinata BL ultrà punctum D in situm bl pervenit, minuenda est area AKD areâ blD, ob arearum plagas contrarias, et tunc erit $bc = \sqrt{(2AKD - 2blD.)}$

3. Et Ordinata bc progrediendo à D ad Q continuò minuitur donec tandem ad Q evanescit; tunc existente areâ affirmativâ AKD æquali areæ negativæ QMD.

4. Si sit $FR = FQ$ ad partes contrarias

sita, ordinata imaginaria erit inter puncta Q et R, ob negativam aream prævalentem, et ad R iterum incipiet esse realis. Etenim area, cujus lateri quadrato æqualis est ordinata, manebit negativa donec area affirmativa infinita $FRNS$ evadat æqualis areæ negativæ infinitæ $FQMT$.

5. Atque inter puncta R et G ordinata eodem modo increscet, quo priùs decrevit inter puncta D, Q; et inter puncta G, P, ubì est $FA = FP$, ordinata rursùs continuò decrescet, atque tandem ad punctum P evanescet.

6. Ex his omnibus conjunctim constat Lineam de quâ quærebatur, fore curvam Irrationalem quarti ordinis (quam scilicet recta in quatuor tantum punctis secare potest) constantem ex duabus Ovalibus æqualibus, similibus, et similiter positis, quæ habent punctum duplex in plaga Ordinatam ad distantiam infinitam.

Radius curvaturæ ad punctum A æqualis est AK ordinatæ Hyperbolæ per punctum A transeuntis. Concipe enim Abscissam AB esse infinite parvam, et radius curvaturæ ad punctum A æqualis erit $\frac{BC^2}{2AB} = \frac{y^2}{2x}$: est vero in primâ suâ magnitudine

$$y^2 = 2\,AB \times AK = 2\,x \times AK:$$

Radius curvaturæ ad punctum A æqualis est ergo AK; et eodem modo ostenditur Radium curvaturæ ad Q fore QM.

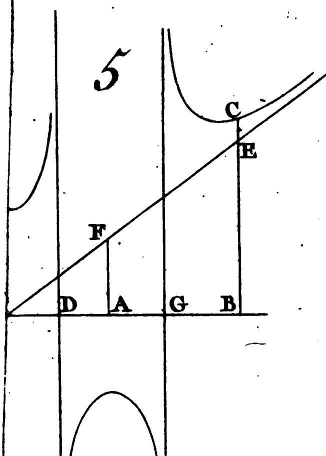
WPw, ZAz partes curvæ duæ exteriores secant omnes Hyperbolas, ad angulos rectos qui axem habent rectam GD. Partes duæ reliquæ interiores WRw, ZQz ad angulos rectos secant omnes Ellipses qui axem habent GD. Adeoque ejusdem curvæ portiones diversæ satisfaciunt problemati in Ellipsi et Hyperbolâ; Ellipsis vero cujus axis minor coincidit cum axe Parabolæ, et centrum cum vertice, et cujus axis major est ad minorem ut diameter quadrati ad latus; secabit omnes Parabolas circà axem illum eodem vertice descriptas.

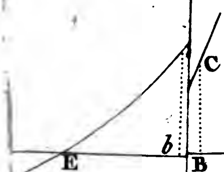
FINIS.

TYPIS J.-R. LOTTIN, 1797.

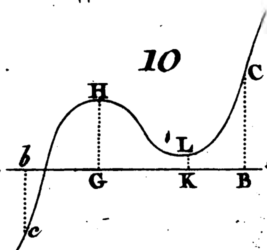


5



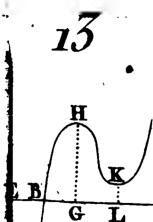


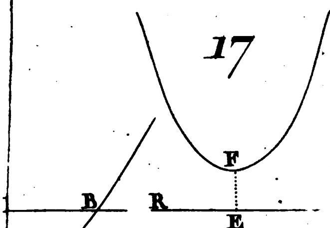
10



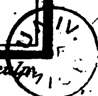
13

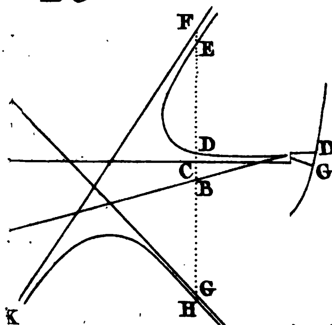
17

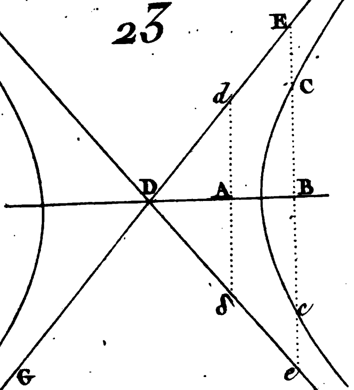


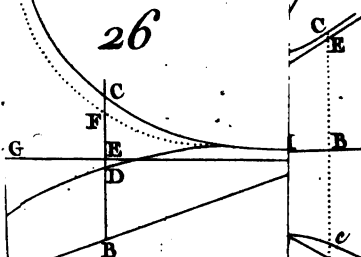


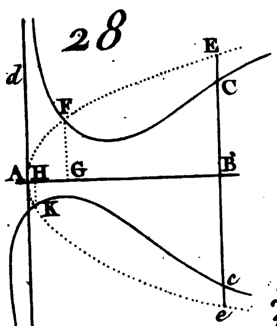
Duruisseau Sculp.

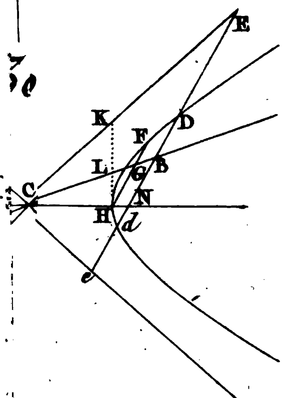


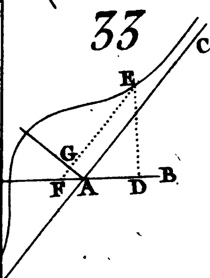


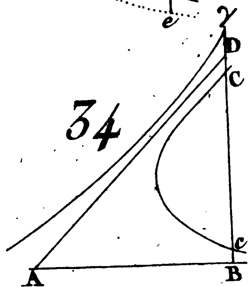




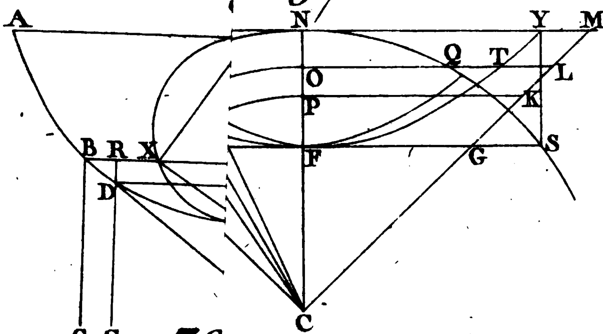


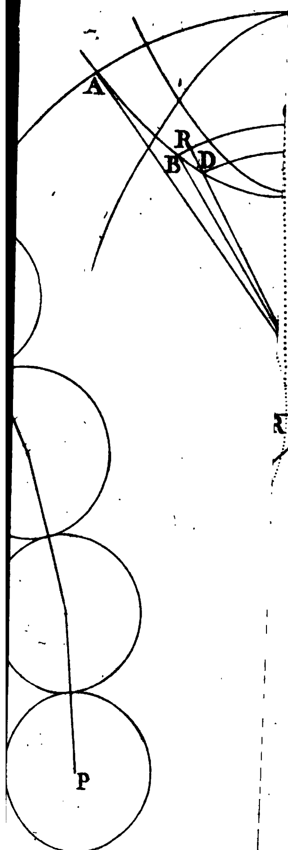


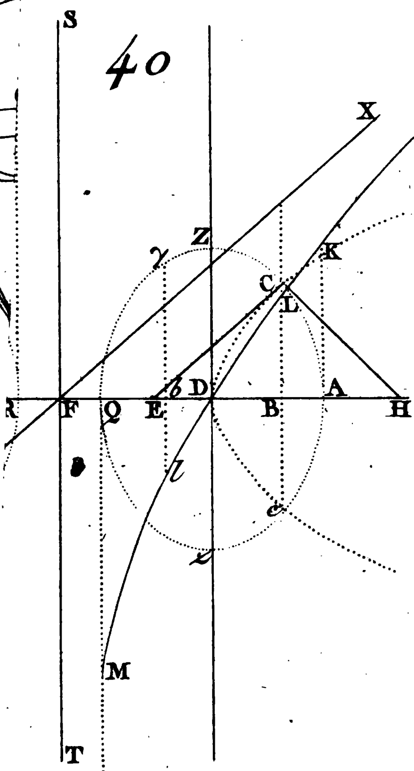




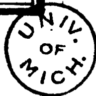
Durnisfeau Sculp







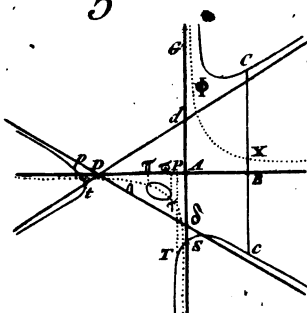
Duruisseau Sculp.



NEW
TA

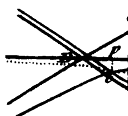
3

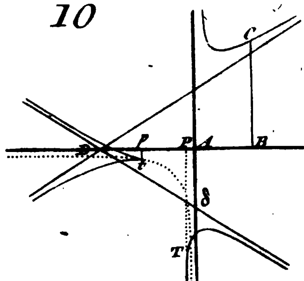
5

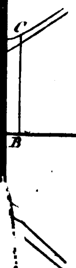




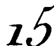


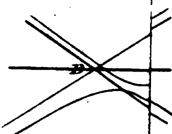


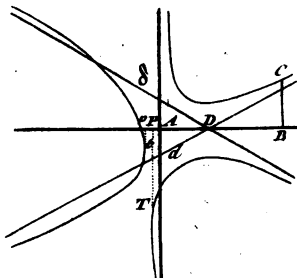








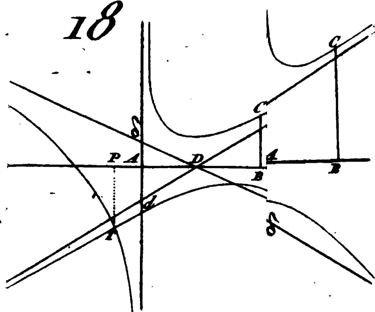


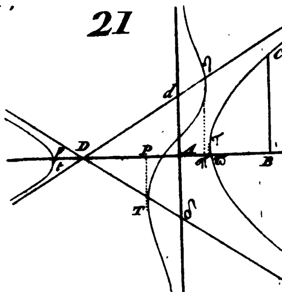


NE

TA

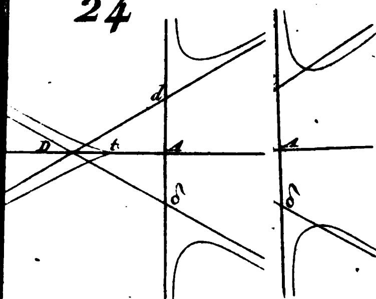
18

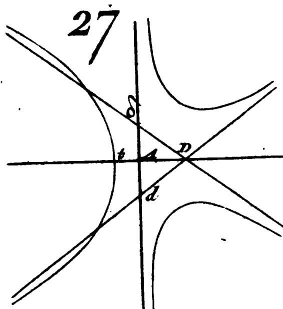




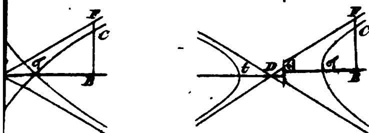
21

24

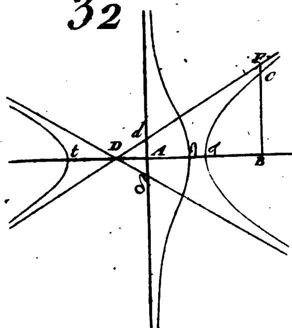




27

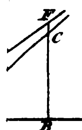


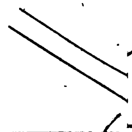
32



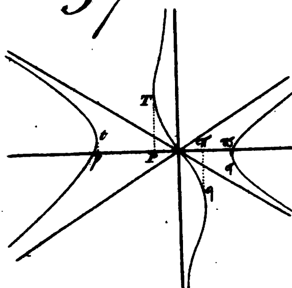
Lefrançois

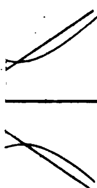
NE
TA

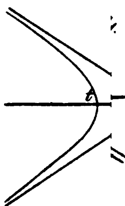




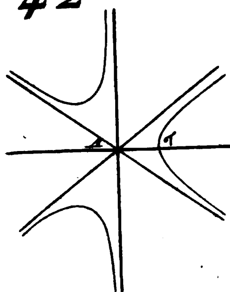
37

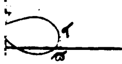






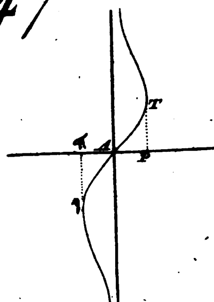
42







47



NEV

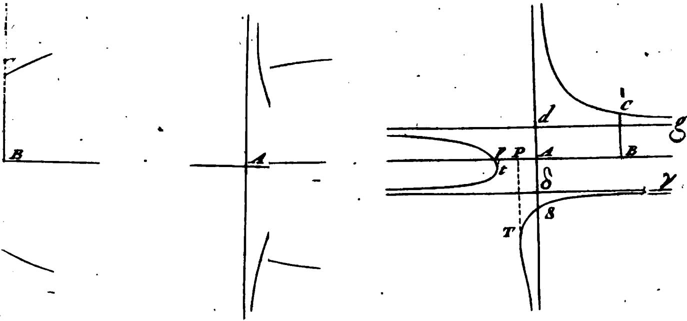
TAB

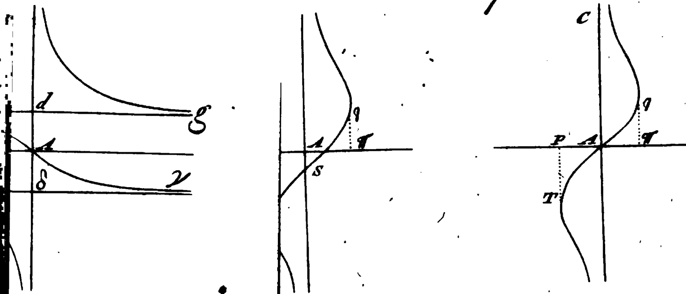
50 52

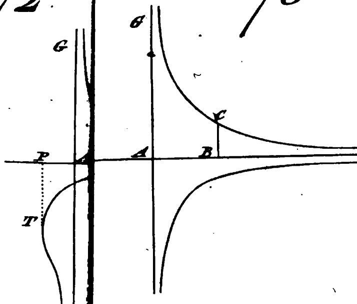
56

0.

Lefrançois . Sculp

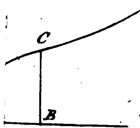


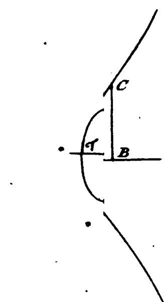




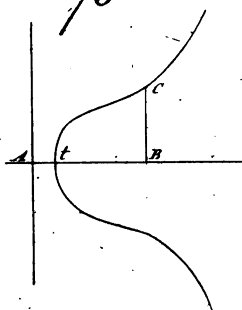
Gravé par Lefrançois.

75

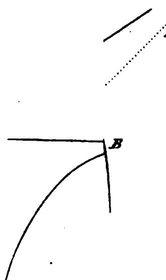




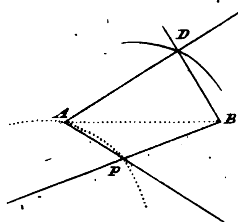
78



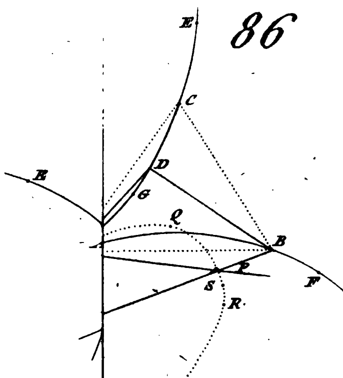
8



83



86



Gravé par Lefrançais.

